This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

24

Sci295.10

TRANSFERRED
TO
HARV[redacted]

EFFEMERIDI ASTRONOMICHE
DI MILANO
PER L'ANNO 1846

CALCOLATE

DA

ROBERTO STAMBUCCHI

CON

APPENDICE

DI MEMORIE ED OSSERVAZIONI ASTRONOMICHE.

MILANO
DALL' IMP. REGIA STAMPERIA
1844.

Sci 295.10

1856 Jan 15

Haven Fund

INDICE.

Spiegazione dei simboli e delle abbreviature . . . . . pag. VI
Feste mobili, numeri dell' anno e quattro tempora . . . . . » VII
Eclissi dell'anno 1846, *obbliquità apparente dell'eclittica, e nutazione dei punti equinoziali in longitudine* . . . . . » VIII
Occultazioni dei pianeti e delle principali stelle dietro la Luna per l' anno 1846 . . . . . » IX
Posizioni del Sole, della Luna e dei Satelliti di Giove . . . . . » X
Semidiametro del Sole, tempo impiegato dal Sole a passare pel meridiano, e longitudine del nodo della Luna di 6 in 6 giorni » 73
Posizioni dei pianeti . . . . . » 74
Fenomeni ed osservazioni . . . . . » 87

APPENDICE.

Solstizj osservati col circolo moltiplicatore di Reichenbach negli anni 1842, 1843 *e* 1844 *da* Francesco Carlini . . . . . » 3
Genesi delle funzioni simetriche ed alternate di Paolo Frisiani . » 97
Osservazioni istituite sull' Eclisse totale di Sole del 7 *luglio* 1842 » 263

AVVERTIMENTO.

Il calcolo da me istituito sull' Eclisse parziale di Sole che avrà luogo nel 25 aprile 1846 venne verificato dal sig. Dottore *Amedeo Albertazzi*, già allievo libero in quest' Osservatorio, che si occupa con impegno e vantaggio negli studj astronomici.

Effemeridi del 1845.

						Errori.	*Correzioni.*
Pag.	IV	lin.	5		App.	alle Eff. del 1844	App. alle Eff. del 1845
»	7	»	5	col.	2	Ultimo quarto	Primo quarto
»	7	»	7	»	2	Primo quarto	Ultimo quarto
»	9	»	8	»	4	0″,71	+ 0″,71
»	19	»	5	»	2	Ultimo quarto	Primo quarto
»	19	»	7	»	2	Primo quarto	Ultimo quarto
»	71	»	ultima	»	8	21ʰ 56′	21ʰ 46′

Appendice alle Effemeridi del 1845.

Pag.	114	lin.	10	cercare il più piccolo valore di y che la soddisfi.	cercare fra i valori di y che la soddisfano quello cui corrisponde per x la radice dotata del modulo più piccolo.

Appendice alle Effemeridi del 1846.

				Errori.	*Correzioni.*
Pag.	125	linea	2	$m^{1} i^{n}$	$m^{i} i^{m}$
»	139	»	10	$+S(\gamma+\delta,\alpha,\beta,o^{n-z})$	$+S(\gamma+\delta,\alpha,\beta,o^{n-1})$
»	149	»	28	ma il segno che	inoltre il segno che
»	150	»	20	$= +Dn$	$= +D(n)$
»	152	»	24	$D^{p}(n)$	$D_{p}(n)$
»	173	»	6	$(a^{a}(b)^{b}(c)^{c}$	$(a)^{a}(b)^{b}(c)^{c}$
»	216	»	19	$\pm\frac{D(g-a)^{g-z}}{D(g)^{g}}$	$\pm\frac{D(g-a)^{g-y}}{D(g)^{g}}$
»	216	»	20	$\mp\frac{D(g-y)^{h-a}}{D(g)^{g}}$	$\mp\frac{D(g-y)^{g-a}}{D(g)^{g}}$
»	224	»	9	$\phi(\alpha)(\zeta)^{a}$	$\phi_{1}(\alpha)(\zeta)^{a}$

SPIEGAZIONE DEI SIMBOLI E DELLE ABBREVIATURE.

Segni del Zodiaco.

♈ Ariete.
♉ Toro.
♊ Gemelli.
♋ Cancro.
♌ Leone.
♍ Vergine.
♎ Libra.
♏ Scorpione.
♐ Sagittario.
♑ Capricorno.
♒ Aquario.
♓ Pesci.

Pianeti.

☿ Mercurio.
♀ Venere.
♁ Terra.
♂ Marte.
⚳ Cerere.
⚴ Pallade.
⚵ Giunone.
⚶ Vesta.
♃ Giove.
♄ Saturno.
♅ Urano.

☉ Sole.

g	indica	Giorni.
h		Ore.
s		Segni.
°		Gradi.
′		Minuti.
″		Secondi.
☌		Congiunzione.
☍		Opposizione.
☊		Nodo ascendente.
☋		Nodo discendente.

☽ Luna.

M	indica	Mattina.
S		Sera.
A		Australe.
B		Boreale.
diff.		Differenza.
dist. min.		Distanza minima.
imm.		Immersione.
em.		Emersione.
AR.		Ascensione retta.
Lat.		Latitudine.

FESTE MOBILI.

Settuagesima			8	Febbrajo.
Giorno delle Ceneri			25	Febbrajo.
Pasqua di Risurrezione			12	Aprile.
Litanie alla Romana	18	19	20	Maggio.
Ascensione del Signore			21	Maggio.
Litanie all'Ambrosiana	25	26	27	Maggio.
Pentecoste			31	Maggio.
Santissima Trinità			7	Giugno.
Corpus Domini			11	Giugno.
Avvento all'Ambrosiana			15	Novembre.
Avvento alla Romana			29	Novembre.

NUMERI DELL'ANNO.

Numero d'Oro	4.
Ciclo Solare	7.
Epatta	III.
Indizione Romana	4.
Lettera Domenicale	D.

QUATTRO TEMPORA.

Di Primavera	4	6	7	Marzo.
D'Estate	3	5	6	Giugno.
D'Autunno	16	18	19	Settembre.
D'Inverno	16	18	19	Dicembre.

ECLISSI DELL' ANNO 1846 IN TEMPO MEDIO.

25 Aprile. Eclisse parziale di Sole visibile a Milano.
Principio dell' Eclisse 6^h 10′ 32″.
La fine dell' Eclisse avrà luogo dopo il tramonto del Sole.
Massima oscurazione a 6^h 55′ 55″.
Distanza minima dai centri 19′ 53″.
Quantità dell' Eclisse digiti 4 min. 27.
Il primo appulso avrà luogo a 186° di distanza dal diametro verticale del Sole.

19 Ottobre. Eclisse di Sole invisibile a Milano.
Congiunzione vera della Luna col Sole a 20^h 20′.

Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.	Giorni dell' anno.	Obbliquità apparente dell' eclittica.	Nutazione de' punti equinoziali in longit.
	° ′ ″	″		° ′ ″	″
0	23 27 26,7	+ 12,3	190	23 27 25,6	+ 10,2
10	26,7	+ 12,5	200	25,6	+ 10,4
20	26,9	+ 12,7	210	25,8	+ 10,4
30	27,0	+ 12,7	220	25,8	+ 10,3
40	27,2	+ 12,6	230	26,1	+ 10,0
50	27,2	+ 12,3	240	26,1	+ 9,7
60	27,4	+ 11,9	250	26,2	+ 9,3
70	27,4	+ 11,4	260	26,2	+ 8,7
80	27,3	+ 10,9	270	26,1	+ 8,1
90	27,2	+ 10,3	280	26,1	+ 7,5
100	27,0	+ 9,7	290	25,8	+ 7,0
110	26,9	+ 9,2	300	25,6	+ 6,7
120	26,5	+ 9,0	310	25,3	+ 6,4
130	26,3	+ 8,9	320	25,1	+ 6,3
140	26,0	+ 8,9	330	24,8	+ 6,4
150	25,9	+ 9,0	340	24,7	+ 6,6
160	25,7	+ 9,3	350	24,5	+ 6,9
170	25,6	+ 9,6	360	24,5	+ 7,3
180	25,5	+ 9,9	370	24,6	+ 7,7

Occultazioni dei pianeti e delle principali stelle dietro la Luna per l'anno 1846 *a Milano.*

Giorni del mese.	Astri occultati.	Tempo medio dell' immer.	Tempo medio dell' emers.	Distanza dal punto più alto della ☽ nell'em.	Cong. appar. sull' orbita.	Distanza minima dal lembo della ☽.
		h ′	h ′	°	h ′	′ ″
Genn. 8	74 ε ♉ 4.ª	5 37	6 27	126	.....	.....
31	63 δ ♉ 5.	8 35	9 44	134	.....	.....
Febb. 1	♂	.....	.....	.....	11 7	4 0 A
4	74 ε ♉ 4.	13 52	14 47*	102	.....	.....
18	8 β ♏ prec. 2.	18 4	19 22	80	.....	.....
Marzo 7	68 k □ 5.	.....	.....	.....	13 16	3 30 A
Aprile 3	54 λ □ 4. 5.	12 36	13 40*	95	.....	.....
14	4 ψ Ofiuco 5.	12 33	13 47	96	.....	.....
17	44 ρ¹ ♒ 5.	12 50*	13 52	41	.....	.....
18	9 β ♐ 3. 4.	13 54	14 27	18	.....	.....
Maggio 11	8 β ♏ prec. 2.	13 19	14 9	150	.....	.....
Luglio 2	α ♍ Spica 1.	9 8	10 24	100	.....	.....
5	8 β ♏ prec. 2.	.....	.....	.....	8 37	4 30 A
5	14 ν ♏ 4.	11 41	12 40	80	.....	.....
8	44 ρ¹ ♒ 5.	13 54	14 33	70	.....	.....
31	9 α² ♎ 3.	9 46	10 8	48	.....	.....
Agosto 14	68 δ³ ♉ 5.	13 28	14 15	170	.....	.....
Sett. 1	44 ρ¹ ♒ 5.	10 5	11 18	121	.....	.....
11	104 m ♉ 5.	15 51	17 22	103	.....	.....
Ottob. 11	54 λ □ 4. 5.	11 11	12 15	30	.....	.....
Nov. 4	61 δ¹ ♉ 4.	.....	.....	.....	17 7	5 45 B
4	68 δ³ ♉ 5.	17 51	19 2	135	.....	.....
5	104 m ♉ 5.	9 38	10 28	15	.....	.....
17	☿	.....	.....	.....	21 7	3 30 A
22	44 ρ¹ ♒ 5.	5 18	6 27	153	.....	.....
23	9 β ♐ 3. 4.	6 26	7 33	110	.....	.....
Dicem. 5	68 k □ 5.	.....	.....	.....	13 35	2 0 A
14	9 α² ♎ 3.	.....	.....	.....	19 20	5 45 A
17	☿	3 6	4 13**	137	.....	.....
29	68 δ³ ♉ 5.	9 0	10 25	112	.....	.....

* Luna all'orizzonte. ** Luna sotto all'orizzonte.

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
4	Primo quarto	3h 2′
12	Luna piena	2 38
20	Ultimo quarto	4 29
26	Luna nuova	22 0

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
2	18 λ ♓ 5.ª	16 33
3	63 δ ♓ 5.ª	23 33
4	71 ε ♓ 4.ª	5 40
8	74 ε ♉ 4.ª	6 50
11	54 λ □ 4. 5.ª	15 38
11	68 k □ 5.ª	23 22
13	65 α² ♋ 5.ª	17 54
22	45 λ ♎ 5.ª	6 38
22	8 β ♏ prec. 2.ª	11 20
22	9 ω¹ ♏ 4. 5.ª	12 10
22	14 ν ♏ 4.ª	13 49
22	4 ψ Ofiuco 5.ª	18 45
23	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	17 4
24	13 μ¹ ⇉ 3. 4.ª	13 8
25	43 d ⇉ 5.ª	13 12
25	44 ρ¹ ⇉ 5.ª	14 58
26	9 β ♑ 3. 4.ª	15 49
27	13 μ ♒ 5.ª	9 8
30	18 λ ♓ 5.ª	1 37
31	63 δ ♓ 5.ª	7 32
31	71 ε ♓ 4.ª	13 25

GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*	
	I. SATELLITE.	
	h ′ ″	
2	0 34 45	em.
3	19 3 40	
5	13 32 44	
* 7	8 1 42	
9	2 30 45	
10	20 59 41	
12	15 28 45	
* 14	9 57 44	
16	4 26 48	
17	22 55 44	
19	17 24 48	
* 21	11 53 46	
* 23	6 22 51	
25	0 51 47	
26	19 20 51	
28	13 49 49	
* 30	8 18 53	
	II. SATELLITE.	
2	20 2 10	em.
* 6	9 20 7	
9	22 38 5	
* 13	11 56 2	
17	1 14 0	
20	14 31 57	
24	3 49 54	
27	17 7 51	
* 31	6 25 48	
	III. SATELLITE.	
* 2	13 34 6	imm.
2	15 36 52	em.
9	17 36 31	imm.
9	19 39 1	em.
16	21 39 34	imm.
16	23 41 51	em.
24	1 42 6	imm.
24	3 44 11	em.
* 31	5 44 47	imm
* 31	7 46 41	em.

Nell'anno 1846 non vi saranno eclissi del quarto satellite.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
1	1	Giov.	0 3 49,68	18 46 45,62	18 42 55,31	7 39	4 21
2	2	Ven.	0 4 17,99	18 51 10,56	18 46 51,87	7 38	4 22
3	3	Sab.	0 4 45,94	18 55 35,15	18 50 48,43	7 38	4 22
4	4	Dom.	0 5 13,47	18 59 59,32	18 54 44,99	7 37	4 23
5	5	Lun.	0 5 40,56	19 4 23,04	18 58 41,55	7 37	4 23
6	6	Mart.	0 6 7,18	19 8 46,29	19 2 38,11	7 36	4 24
7	7	Merc.	0 6 33,33	19 13 9,07	19 6 34,67	7 35	4 25
8	8	Giov.	0 6 58,93	19 17 31,31	19 10 31,23	7 34	4 26
9	9	Ven.	0 7 24,02	19 21 53,03	19 14 27,79	7 34	4 26
10	10	Sab.	0 7 48,55	19 26 14,17	19 18 24,34	7 33	4 27
11	11	Dom.	0 8 12,48	19 30 34,73	19 22 20,90	7 32	4 28
12	12	Lun.	0 8 35,82	19 34 54,68	19 26 17,45	7 32	4 28
13	13	Mart.	0 8 58,54	19 39 14,02	19 30 14,01	7 31	4 29
14	14	Merc.	0 9 20,63	19 43 32,72	19 34 10,56	7 30	4 30
15	15	Giov.	0 9 42,05	19 47 50,76	19 38 7,12	7 29	4 31
16	16	Ven.	0 10 2,82	19 52 8,14	19 42 3,67	7 28	4 32
17	17	Sab.	0 10 22,90	19 56 24,84	19 46 0,23	7 26	4 34
18	18	Dom.	0 10 42,26	20 0 40,81	19 49 56,79	7 25	4 35
19	19	Lun.	0 11 0,94	20 4 56,12	19 53 53,34	7 24	4 36
20	20	Mart.	0 11 18,90	20 9 10,66	19 57 49,90	7 23	4 37
21	21	Merc.	0 11 36,12	20 13 24,48	20 1 46,46	7 22	4 38
22	22	Giov.	0 11 52,59	20 17 37,55	20 5 43,01	7 21	4 39
23	23	Ven.	0 12 8,31	20 21 49,88	20 9 39,57	7 20	4 40
24	24	Sab.	0 12 23,25	20 26 1,41	20 13 36,12	7 18	4 42
25	25	Dom.	0 12 37,40	20 30 12,16	20 17 32,68	7 17	4 43
26	26	Lun.	0 12 50,77	20 34 22,11	20 21 29,23	7 16	4 44
27	27	Mart.	0 13 3,33	20 38 31,26	20 25 25,79	7 15	4 45
28	28	Merc.	0 13 15,07	20 42 39,59	20 29 22,34	7 14	4 46
29	29	Giov.	0 13 25,99	20 46 47,07	20 33 18,90	7 13	4 47
30	30	Ven.	0 13 36,07	20 50 53,75	20 37 15,45	7 12	4 48
31	31	Sab.	0 13 45,31	20 54 59,58	20 41 12,01	7 11	4 49

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	9 10 44 40,9	23 1 19,4	+ 0,20	0,49B	9,9926692
2	9 11 45 51,7	22 56 9,5	0,22	0,45	9,9926693
3	9 12 47 2,2	22 50 32,0	0,24	0,38	9,9926712
4	9 13 48 12,4	22 44 27,4	0,26	0,29	9,9926752
5	9 14 49 22,0	22 37 55,7	0,28	0,18	9,9926814
6	9 15 50 31,1	22 30 57,5	0,30	0,04	9,9926898
7	9 16 51 39,9	22 23 32,2	0,32	0,09A	9,9927007
8	9 17 52 48,1	22 15 40,8	0,33	0,23	9,9927141
9	9 18 53 55,9	22 7 23,1	0,35	0,36	9,9927300
10	9 19 55 3,0	21 58 39,4	0,37	0,48	9,9927486
11	9 20 56 9,6	21 49 30,0	0,39	0,57	9,9927701
12	9 21 57 15,8	21 39 55,3	0,40	0,64	9,9927944
13	9 22 58 21,6	21 29 55,5	0,42	0,68	9,9928216
14	9 23 59 26,9	21 19 30,7	0,44	0,69	9,9928515
15	9 25 0 31,7	21 8 41,3	0,46	0,68	9,9928842
16	9 26 1 36,2	20 57 27,6	0,47	0,65	9,9929195
17	9 27 2 40,3	20 45 50,0	0,49	0,56	9,9929575
18	9 28 3 44,1	20 33 48,8	0,51	0,45	9,9929979
19	9 29 4 47,5	20 21 24,1	0,53	0,34	9,9930406
20	10 0 5 50,4	20 8 36,2	0,54	0,21	9,9930857
21	10 1 6 52,9	19 55 25,6	0,56	0,07	9,9931328
22	10 2 7 55,0	19 41 53,0	0,57	0,05B	9,9931817
23	10 3 8 56,6	19 27 58,5	0,59	0,16	9,9932325
24	10 4 9 57,5	19 13 42,0	0,60	0,26	9,9932851
25	10 5 10 57,6	18 59 4,4	0,61	0,35	9,9933392
26	10 6 11 57,0	18 44 6,0	0,63	0,40	9,9933946
27	10 7 12 55,5	18 28 47,1	0,64	0,42	9,9934513
28	10 8 13 52,9	18 13 8,4	0,65	0,41	9,9935095
29	10 9 14 49,4	17 57 10,0	0,67	0,37	9,9935692
30	10 10 15 44,7	17 40 52,3	0,68	0,31	9,9936304
31	10 11 16 38,8	17 24 15,8	0,69	0,22	9,9936929

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Giov.	11 0 19 57	11 7 36 8	4 54 44B	4 42 5B	3 27
2	Ven.	11 14 45 41	11 21 48 21	4 25 10	4 4 27	4 19
3	Sab.	11 28 44 4	0 5 32 57	3 40 27	3 13 40	5 9
4	Dom.	0 12 15 16	0 18 51 20	2 44 38	2 13 48	5 58
5	Lun.	0 25 21 40	1 1 46 44	1 41 40	1 8 41	6 46
6	Mart.	1 8 7 3	1 14 23 9	0 35 16	0 1 48	7 34
7	Merc.	1 20 35 33	1 26 44 43	0 31 20A	1 3 46A	8 23
8	Giov.	2 2 51 6	2 8 55 8	1 35 11	2 5 16	9 12
9	Ven.	2 14 57 14	2 20 57 43	2 33 44	3 0 18	10 1
10	Sab.	2 26 56 55	3 2 55 5	3 24 45	3 46 50	10 50
11	Dom.	3 8 52 29	3 14 49 19	4 6 20	4 23 6	11 37
12	Lun.	3 20 45 46	3 26 42 0	4 36 57	4 47 45	12 24
13	Mart.	4 2 38 10	4 8 34 25	4 55 25	4 59 52	13 9
14	Merc.	4 14 30 55	4 20 27 53	5 1 3	4 58 57	13 52
15	Giov.	4 26 25 30	5 2 24 2	4 53 34	4 44 57	14 35
16	Ven.	5 8 23 46	5 14 25 2	4 33 9	4 18 15	15 18
17	Sab.	5 20 28 11	5 26 33 39	4 0 21	3 39 35	16 1
18	Dom.	6 2 41 53	6 8 53 22	3 16 7	2 50 7	16 45
19	Lun.	6 15 8 36	6 21 28 9	2 21 48	1 51 24	17 31
20	Mart.	6 27 52 33	7 4 22 21	1 19 12	0 45 32	18 20
21	Merc.	7 10 58 6	7 17 40 15	0 10 45	0 24 44B	19 13
22	Giov.	7 24 29 13	8 1 25 20	1 0 27B	1 35 52	20 10
23	Ven.	8 8 28 42	8 15 39 19	2 10 24	2 43 26	21 9
24	Sab.	8 22 56 54	9 0 20 58	3 14 19	3 42 22	22 11
25	Dom.	9 7 50 46	9 15 25 21	4 6 55	4 27 22	23 13
26	Lun.	9 23 3 30	10 0 43 51	4 43 11	4 53 59	* *
27	Mart.	10 8 24 57	10 16 5 16	4 59 28	4 59 32	0 13
28	Merc.	10 23 43 20	11 1 17 43	4 54 14	4 43 47	1 11
29	Giov.	11 8 47 13	11 16 10 46	4 28 31	4 8 54	2 6
30	Ven.	11 23 27 35	0 0 37 8	3 45 29	3 18 50	2 59
31	Sab.	0 7 39 6	0 14 33 24	2 49 34	2 18 18	3 50

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	22 11	6 5A	60 6	59 42	32 49	32 36	22 18	9 17
2	23 7	1 3	59 17	58 50	32 22	32 7	22 49	10 30
3	0 0	3 52B	58 23	57 56	31 52	31 38	23 20	11 39
4	0 53	8 25	57 30	57 5	31 24	31 10	23 49	12 47
5	1 46	12 15	56 42	56 20	30 57	30 45	* *	13 53
6	2 38	15 42	55 59	55 40	30 34	30 23	0 21	14 56
7	3 31	18 8	55 23	55 8	30 14	30 6	0 57	15 56
8	4 24	19 38	54 54	54 42	29 58	29 52	1 37	16 51
9	5 17	20 9	54 31	54 22	29 46	29 41	2 22	17 40
10	6 10	19 41	54 14	54 7	29 36	29 33	3 11	18 26
11	7 1	18 18	54 2	53 58	29 30	29 28	4 4	19 4
12	7 52	16 5	53 56	53 54	29 27	29 26	5 1	19 38
13	8 41	13 9	53 54	53 55	29 26	29 26	6 0	20 9
14	9 29	9 40	53 57	54 2	29 27	29 30	6 58	20 37
15	10 15	5 46	54 7	54 14	29 33	29 36	7 58	21 3
16	11 2	1 36	54 23	54 33	29 41	29 47	8 58	21 30
17	11 49	2 41A	54 46	55 0	29 54	30 2	9 58	21 55
18	12 37	6 56	55 17	55 35	30 11	30 21	11 0	22 21
19	13 28	10 58	55 55	56 17	30 32	30 44	12 5	22 50
20	14 21	14 34	56 41	57 7	30 57	31 11	13 10	23 23
21	15 18	17 28	57 34	58 2	31 26	31 41	14 18	* *
22	16 19	19 24	58 30	58 59	31 56	32 12	15 25	0 3
23	17 23	20 3	59 26	59 53	32 27	32 42	16 29	0 52
24	18 28	19 14	60 18	60 39	32 55	33 7	17 29	1 49
25	19 34	16 56	60 57	61 11	33 16	33 24	18 21	2 56
26	* *	* *	61 21	61 25	33 29	33 32	19 5	4 11
27	20 39	13 19	61 24	61 19	33 31	33 28	19 44	5 30
28	21 40	8 46	61 8	60 53	33 22	33 14	20 16	6 49
29	22 40	3 42	60 33	60 10	33 3	32 51	20 50	8 6
30	23 37	1 28B	59 44	59 16	32 37	32 21	21 21	9 19
31	0 32	6 21	58 48	58 18	32 6	31 50	21 51	10 30

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente $8^h\ 57'$ *Occidente*

| | | |

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
2	Primo quarto	17h 48′
10	Luna piena	21 49
18	Ultimo quarto	17 20
25	Luna nuova	8 8

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	♂	9 13
4	74 ε ♉ 4.ª	12 49
7	54 λ □ 4. 5.ª	21 43
8	68 k □ 5.ª	5 28
10	65 α² ♋ 5.ª	0 2
15	α ♍ Spica 1.ª	18 17
17	9 α² ♎ 3.ª	10 4
18	45 κ ♎ 5.ª	9 5
18	45 λ ♎ 5.ª	13 59
18	8 β ♏ prec. 2.ª	18 49
18	14 ν ♏ 4.ª	21 23
19	4 ψ Ofiuco 5.ª	2 31
20	40 p Ofiuco 4. 5.ª	1 39
21	43 d ♐ 5.ª	23 22
22	44 ρ¹ ♐ 5.ª	1 9
23	9 β ♑ 3. 4.ª	0 38
23	13 γ ♒ 5.ª	20 15
26	18 λ ♓ 5.ª	12 30
27	63 δ ♓ 5.ª	17 40
27	71 ε ♓ 4.ª	23 25

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*
	I. SATELLITE.
	h ′ ″
1	2 47 49 em.
2	21 16 53
4	15 45 51
* 6	10 14 54
8	4 43 50
9	23 12 53
11	17 41 50
13	12 10 53
* 15	6 39 48
17	1 8 51
18	19 37 47
20	14 6 50
* 22	8 35 44
24	3 4 45
25	21 33 41
27	16 2 43
	II. SATELLITE.
3	19 43 45 em.
* 7	9 1 42
10	22 19 40
14	11 37 37
18	0 55 36
21	14 13 34
25	3 31 33
28	16 49 31
	III. SATELLITE.
* 7	9 46 54 imm.
7	11 48 39 em.
14	13 48 54 imm.
14	15 50 32 em.
21	17 51 3 imm.
21	19 52 37 em.
28	21 53 10 imm.
28	23 54 41 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
32	1	Dom.	0 13 53,73	20 59 4,57	20 45 8,56	7 9	4 51
33	2	Lun.	0 14 1,30	21 3 8,72	20 49 5,12	7 8	4 52
34	3	Mart.	0 14 8,03	21 7 12,02	20 53 1,67	7 6	4 54
35	4	Merc.	0 14 13,93	21 11 14,49	20 56 58,23	7 5	4 55
36	5	Giov.	0 14 18,98	21 15 16,11	21 0 54,78	7 3	4 57
37	6	Ven.	0 14 23,21	21 19 16,91	21 4 51,34	7 2	4 58
38	7	Sab.	0 14 26,61	21 23 16,87	21 8 47,89	7 1	4 59
39	8	Dom.	0 14 29,18	21 27 16,01	21 12 44,45	7 0	5 0
40	9	Lun.	0 14 30,95	21 31 14,33	21 16 41,00	6 58	5 2
41	10	Mart.	0 14 31,92	21 35 11,86	21 20 37,56	6 57	5 3
42	11	Merc.	0 14 32,11	21 39 8,61	21 24 34,11	6 55	5 5
43	12	Giov.	0 14 31,55	21 43 4,59	21 28 30,66	6 54	5 6
44	13	Ven.	0 14 30,22	21 46 59,81	21 32 27,21	6 53	5 7
45	14	Sab.	0 14 28,16	21 50 54,29	21 36 23,76	6 51	5 9
46	15	Dom.	0 14 25,32	21 54 48,04	21 40 20,32	6 49	5 11
47	16	Lun.	0 14 21,84	21 58 41,07	21 44 16,87	6 48	5 12
48	17	Mart.	0 14 17,63	22 2 33,39	21 48 13,42	6 46	5 14
49	18	Merc.	0 14 12,73	22 6 25,03	21 52 9,97	6 45	5 15
50	19	Giov.	0 14 7,17	22 10 16,01	21 56 6,53	6 43	5 17
51	20	Ven.	0 14 0,92	22 14 6,31	22 0 3,09	6 42	5 18
52	21	Sab.	0 13 54,06	22 17 55,98	22 3 59,64	6 40	5 20
53	22	Dom.	0 13 46,55	22 21 45,01	22 7 56,20	6 38	5 22
54	23	Lun.	0 13 38,43	22 25 33,42	22 11 52,75	6 37	5 23
55	24	Mart.	0 13 29,70	22 29 21,23	22 15 49,31	6 35	5 25
56	25	Merc.	0 13 20,40	22 33 8,45	22 19 45,86	6 34	5 26
57	26	Giov.	0 13 10,48	22 36 55,06	22 23 42,41	6 32	5 28
58	27	Ven.	0 13 0,01	22 40 41,11	22 27 38,97	6 31	5 29
59	28	Sab.	0 12 48,98	22 44 26,61	22 31 35,52	6 29	5 31

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	10 12 17 31,6	17 7 20,9	+ 0,71	0,11B	9,9937570
2	10 13 18 22,9	16 50 8,3	0,73	0,01A	9,9938227
3	10 14 19 12,8	16 32 37,9	0,74	0,15	9,9938900
4	10 15 20 1,3	16 14 50,3	0,75	0,29	9,9939593
5	10 16 20 48,2	15 56 46,2	0,76	0,42	9,9940304
6	10 17 21 33,5	15 38 25,7	0,77	0,54	9,9941034
7	10 18 22 17,4	15 19 49,2	0,78	0,63	9,9941784
8	10 19 22 59,7	15 0 57,4	0,79	0,71	9,9942557
9	10 20 23 40,4	14 41 50,6	0,80	0,76	9,9943352
10	10 21 24 19,7	14 22 29,0	0,81	0,78	9,9944169
11	10 22 24 57,6	14 2 53,2	0,82	0,78	9,9945008
12	10 23 25 34,1	13 43 3,4	0,83	0,73	9,9945871
13	10 24 26 9,1	13 23 0,2	0,84	0,66	9,9946756
14	10 25 26 42,9	13 2 43,7	0,85	0,57	9,9947662
15	10 26 27 15,3	12 42 14,7	0,86	0,46	9,9948588
16	10 27 27 46,4	12 21 33,3	0,87	0,33	9,9949532
17	10 28 28 16,2	12 0 40,3	0,87	0,20	9,9950494
18	10 29 28 44,7	11 39 35,5	0,88	0,07	9,9951472
19	11 0 29 11,9	11 18 19,6	0,89	0,05B	9,9952465
20	11 1 29 37,8	10 56 53,2	0,89	0,16	9,9953470
21	11 2 30 2,3	10 35 16,6	0,90	0,24	9,9954486
22	11 3 30 25,4	10 13 30,0	0,91	0,30	9,9955513
23	11 4 30 46,9	9 51 34,0	0,91	0,33	9,9956550
24	11 5 31 6,9	9 29 29,0	0,92	0,33	9,9957595
25	11 6 31 25,4	9 7 15,6	0,92	0,30	9,9958646
26	11 7 31 42,0	8 44 53,9	0,93	0,24	9,9959702
27	11 8 31 56,8	8 22 24,5	0,93	0,16	9,9960763
28	11 9 32 9,8	7 59 47,8	0,94	0,04	9,9961830

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Dom.	0 21 20 10	0 27 59 43	1 45 35B	1 11 58B	4 40
2	Lun.	1 4 32 27	1 10 58 54	0 37 57	0 3 58	5 30
3	Mart.	1 17 19 37	1 23 35 14	0 29 34A	1 2 17A	6 20
4	Merc.	1 29 46 23	2 5 53 41	1 33 52	2 4 1	7 9
5	Giov.	2 11 57 44	2 17 59 8	2 32 27	2 58 57	7 58
6	Ven.	2 23 58 25	2 29 56 8	3 23 18	3 45 16	8 46
7	Sab.	3 5 52 42	3 11 48 34	4 4 41	4 21 24	9 34
8	Dom.	3 17 44 5	3 23 39 35	4 35 14	4 46 5	10 21
9	Lun.	3 29 35 20	4 5 31 35	4 53 50	4 58 23	11 6
10	Mart.	4 11 28 30	4 17 26 15	4 59 40	4 57 42	11 51
11	Merc.	4 23 24 58	4 29 24 48	4 52 27	4 43 55	12 34
12	Giov.	5 5 25 53	5 11 28 21	4 32 10	4 17 18	13 17
13	Ven.	5 17 32 23	5 23 38 9	3 59 25	3 38 41	14 0
14	Sab.	5 29 45 51	6 5 55 46	3 15 17	2 49 25	14 44
15	Dom.	6 12 8 8	6 18 23 16	2 21 20	1 51 18	15 29
16	Lun.	6 24 41 30	7 1 3 12	1 19 38	0 46 38	16 17
17	Mart.	7 7 28 46	7 13 58 38	0 12 41	0 21 49B	17 7
18	Merc.	7 20 33 11	7 27 12 52	0 56 28B	1 30 49	18 0
19	Giov.	8 3 58 4	8 10 49 6	2 4 22	2 36 36	18 56
20	Ven.	8 17 46 11	8 24 49 27	3 7 0	3 34 59	19 55
21	Sab.	9 1 58 50	9 9 14 8	4 0 0	4 21 31	20 54
22	Dom.	9 16 34 53	9 24 0 27	4 39 0	4 51 58	21 54
23	Lun.	10 1 29 59	10 9 2 27	5 0 4	5 3 1	22 52
24	Mart.	10 16 36 39	10 24 11 19	5 0 40	4 53 3	23 48
25	Merc.	11 1 45 8	11 9 16 44	4 40 18	4 22 43	* *
26	Giov.	11 16 44 54	11 24 8 31	4 0 43	3 34 52	0 43
27	Ven.	0 1 26 37	0 8 38 29	3 5 44	2 34 0	1 36
28	Sab.	0 15 43 32	0 22 41 28	2 0 18	1 25 19	2 28

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	1 26	10 44B	57 49	57 20	31 34	31 18	22 24	11 40
2	2 20	14 23	56 53	56 27	31 3	30 49	22 59	12 46
3	3 14	17 10	56 3	55 40	30 36	30 24	23 38	13 49
4	4 7	19 1	55 21	55 3	30 13	30 3	* *	14 45
5	5 0	19 54	54 48	54 34	29 55	29 48	0 21	15 37
6	5 53	19 47	54 23	54 13	29 41	29 36	1 8	16 22
7	6 45	18 45	54 6	54 1	29 32	29 29	1 59	17 4
8	7 35	16 50	53 57	53 55	29 27	29 26	2 54	17 41
9	8 25	14 11	53 55	53 56	29 26	29 27	3 51	18 12
10	9 13	10 55	53 58	54 2	29 28	29 30	4 51	18 42
11	10 0	7 10	54 8	54 14	29 33	29 36	5 50	19 8
12	10 47	3 5	54 21	54 30	29 40	29 45	6 51	19 33
13	11 35	1 10A	54 40	54 50	29 51	29 57	7 50	20 2
14	12 23	5 25	55 2	55 15	30 3	30 10	8 52	20 28
15	13 12	9 29	55 30	55 46	30 18	30 27	9 57	20 54
16	14 4	13 11	56 2	56 20	30 36	30 45	11 1	21 27
17	14 58	16 16	56 40	57 1	30 56	31 8	12 6	22 3
18	15 55	18 32	57 23	57 46	31 20	31 32	13 12	22 45
19	16 55	19 42	58 10	58 34	31 45	31 58	14 14	23 37
20	17 58	19 36	58 57	59 21	32 11	32 24	15 14	* *
21	19 2	18 6	59 43	60 3	32 36	32 47	16 7	0 37
22	20 5	15 15	60 21	60 37	32 57	33 6	16 54	1 46
23	21 7	11 17	60 49	60 56	33 12	33 16	17 35	3 1
24	22 8	6 32	61 0	60 59	33 18	33 18	18 10	4 18
25	* *	* *	60 54	60 44	33 15	33 9	18 43	5 36
26	23 7	1 23	60 29	60 11	33 1	32 51	19 17	6 53
27	0 4	3 44B	59 49	59 25	32 39	32 26	19 49	8 5
28	1 0	8 29	58 59	58 31	32 12	31 57	20 22	9 18

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

| | *Oriente* | | |

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
4	Primo quarto	11h 9′
12	Luna piena	15 26
20	Ultimo quarto	2 35
26	Luna nuova	18 27

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
3	74 ε ♉ 4.ª	20 10
4	104 m ♉ 5.ª	13 49
7	54 λ □ 4. 5.ª	4 23
7	68 k □ 5.ª	12 6
9	65 α² ♋ 5.ª	6 41
15	α ♍ Spica 1.ª	0 0
16	9 α² ♎ 3.ª	15 32
18	8 β ♏ prec. 2.ª	0 25
18	14 ν ♏ 4.ª	3 1
18	4 ψ Ofiuco 5.ª	8 11
19	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	7 44
21	44 ρ¹ ♐ 5.ª	8 38
22	9 β ♑ 3. 4.ª	8 58
23	13 ν ♒ 5.ª	5 16
25	18 λ ♓ 5.ª	22 58
27	63 δ ♓ 5.ª	4 14
27	71 ε ♓ 4.ª	9 56
31	68 δ ♉ 5.ª	3 13
31	74 ε ♉ 4. 5.ª	4 58
31	104 m ♉ 5.ª	22 14

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*			
	I. SATELLITE.			
	h	′	″	
* 1	10	31	36	em.
3	5	0	36	
4	23	29	31	
6	17	58	31	
8	12	27	23	
* 10	6	56	22	
12	1	25	16	
13	19	54	15	
15	14	23	6	
* 17	8	52	4	
19	3	20	56	
20	21	49	54	
22	16	18	44	
24	10	47	39	
26	5	16	30	
27	23	45	26	
29	18	14	15	
31	12	43	9	
	II. SATELLITE.			
* 4	6	7	32	em.
7	19	25	31	
* 11	8	43	32	
14	22	1	33	
18	11	19	35	
22	0	37	38	
25	13	55	41	
29	3	13	47	
	III. SATELLITE.			
8	1	55	51	imm.
8	3	57	21	em.
15	5	57	53	imm.
* 15	7	59	24	em.
22	9	59	57	imm.
22	12	1	31	em.
29	14	1	25	imm.
29	16	3	4	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
60	1	Dom.	0 12 37,43	22 48 11,58	22 35 32,07	6 26	5 34
61	2	Lun.	0 12 15,39	22 51 56,03	22 39 28,62	6 25	5 35
62	3	Mart.	0 12 12,78	22 55 39,96	22 43 25,17	6 24	5 36
63	4	Merc.	0 11 59,70	22 59 23,39	22 47 21,72	6 22	5 38
64	5	Giov.	0 11 46,18	23 3 6,38	22 51 18,27	6 21	5 39
65	6	Ven.	0 11 32,15	23 6 48,87	22 55 14,83	6 19	5 41
66	7	Sab.	0 11 17,71	23 10 30,94	22 59 11,38	6 18	5 42
67	8	Dom.	0 11 2,84	23 14 12,58	23 3 7,93	6 16	5 44
68	9	Lun.	0 10 57,60	23 17 53,84	23 7 4,48	6 15	5 45
69	10	Mart.	0 10 31,98	23 21 34,74	23 11 1,03	6 13	5 47
70	11	Merc.	0 10 16,02	23 25 15,29	23 14 57,58	6 12	5 48
71	12	Giov.	0 9 59,73	23 28 55,51	23 18 54,14	6 10	5 50
72	13	Ven.	0 9 43,15	23 32 35,43	23 22 50,69	6 9	5 51
73	14	Sab.	0 9 26,28	23 36 15,07	23 26 47,24	6 7	5 53
74	15	Dom.	0 9 9,16	23 39 54,45	23 30 45,79	6 5	5 55
75	16	Lun.	0 8 51,83	23 43 33,62	23 34 40,34	6 4	5 56
76	17	Mart.	0 8 34,29	23 47 12,59	23 38 36,89	6 2	5 58
77	18	Merc.	0 8 16,57	23 50 51,37	23 42 33,44	6 1	5 59
78	19	Giov.	0 7 58,69	23 54 29 99	23 46 29,99	5 59	6 1
79	20	Ven.	0 7 40,67	23 58 8,47	23 50 26,54	5 58	6 2
80	21	Sab.	0 7 22,52	0 1 46,84	23 54 23,10	5 56	6 4
81	22	Dom.	0 7 4,30	0 5 25,11	23 58 19,65	5 54	6 6
82	23	Lun.	0 6 46,00	0 9 3,31	0 2 16,20	5 53	6 7
83	24	Mart.	0 6 27,64	0 12 41,45	0 6 12,75	5 51	6 9
84	25	Merc.	0 6 9,22	0 16 19,54	0 10 9,31	5 50	6 10
85	26	Giov.	0 5 50,80	0 19 57,62	0 14 5,86	5 48	6 12
86	27	Ven.	0 5 32,34	0 23 35,66	0 18 2,41	5 46	6 14
87	28	Sab.	0 5 13,91	0 27 13,73	0 21 58,96	5 45	6 15
88	29	Dom.	0 4 55,51	0 30 51,82	0 25 55,51	5 43	6 17
89	30	Lun.	0 4 37,14	0 34 29,95	0 29 52,06	5 41	6 19
90	31	Mart.	0 4 18,83	0 38 8,14	0 33 48,61	5 40	6 20

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE australe del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	° ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	11 10 32 21,0	7 37 4,2	+ 0,95	0,08A	9,9962903
2	11 11 32 30,1	7 14 14,0	0,95	0,21	9,9963982
3	11 12 32 37,1	6 51 17,9	0,96	0,34	9,9965068
4	11 13 32 41,9	6 28 16,1	0,96	0,47	9,9966161
5	11 14 32 44,7	6 5 9,0	0,97	0,60	9,9967263
6	11 15 32 45,2	5 41 57,2	0,97	0,70	9,9968373
7	11 16 32 43,5	5 18 40,8	0,97	0,78	9,9969495
8	11 17 32 39,6	4 55 20,5	0,98	0,82	9,9970627
9	11 18 32 33,6	4 31 56,3	0,98	0,84	9,9971771
10	11 19 32 25,5	4 8 28,7	0,98	0,84	9,9972927
11	11 20 32 15,3	3 44 58,2	0,98	0,80	9,9974096
12	11 21 32 3,1	3 21 25,0	0,98	0,73	9,9975277
13	11 22 31 48,9	2 57 49,5	0,99	0,64	9,9976471
14	11 23 31 32,6	2 34 12,0	0,99	0,53	9,9977678
15	11 24 31 14,5	2 10 33,0	0,99	0,41	9,9978897
16	11 25 30 54,6	1 46 52,7	0,99	0,28	9,9980127
17	11 26 30 32,8	1 23 11,5	0,99	0,15	9,9981366
18	11 27 30 9,4	0 59 29,7	0,99	0,02	9,9982613
19	11 28 29 44,3	0 35 47,7	0,99	0,09B	9,9983868
20	11 29 29 17,3	0 12 5,9	0,99	0,18	9,9985128
21	0 0 28 48,6	0 11 35,4 Boreale	0,99	0,25	9,9986389
22	0 1 28 18,3	0 35 16,0	0,99	0,28	9,9987651
23	0 2 27 46,1	0 58 55,1	0,98	0,28	9,9988914
24	0 3 27 12,2	1 22 32,8	0,98	0,26	9,9990177
25	0 4 26 36,3	1 46 8,4	0,98	0,21	9,9991439
26	0 5 25 58,7	2 9 41,6	0,98	0,14	9,9992696
27	0 6 25 18,9	2 33 12,2	0,98	0,03	9,9993948
28	0 7 24 37,1	2 56 39,6	0,97	0,09A	9,9995194
29	0 8 23 53,3	3 20 3,6	0,97	0,22	9,9996436
30	0 9 23 7,2	3 43 23,5	0,97	0,35	9,9997672
31	0 10 22 19,0	4 6 39,4	0,97	0,48	9,9998902

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		° ° ′ ″	° ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Dom.	0 29 32 11	1 6 15 45	0 49 38B	0 13 50B	3 20
2	Lun.	1 12 52 22	1 19 22 24	0 21 34A	0 56 8A	4 11
3	Mart.	1 25 46 19	2 2 4 39	1 29 28	2 1 13	5 2
4	Merc.	2 8 17 59	2 14 26 55	2 31 7	2 58 54	5 52
5	Giov.	2 20 32 7	2 26 34 11	3 24 21	3 47 18	6 42
6	Ven.	3 2 33 46	3 8 31 28	4 7 33	4 25 1	7 30
7	Sab.	3 14 27 52	3 20 23 30	4 39 32	4 51 1	8 17
8	Dom.	3 26 18 52	4 2 14 27	4 59 22	5 4 29	9 3
9	Lun.	4 8 10 38	4 14 7 46	5 6 20	5 4 52	9 47
10	Mart.	4 20 6 11	4 26 6 6	5 0 4	4 51 57	10 31
11	Merc.	5 2 7 45	5 8 11 21	4 40 31	4 25 52	11 14
12	Giov.	5 14 17 2	5 20 24 56	4 8 5	3 47 18	11 58
13	Ven.	5 26 35 9	6 2 47 48	3 23 43	2 57 31	12 42
14	Sab.	6 9 2 59	6 15 20 47	2 28 58	1 58 21	13 27
15	Dom.	6 21 41 19	6 28 4 40	1 26 1	0 52 19	14 15
16	Lun.	7 4 30 57	7 11 0 19	0 17 40	0 17 33B	15 4
17	Mart.	7 17 32 56	7 24 8 55	0 52 50B	1 27 45	15 56
18	Merc.	8 0 48 30	8 7 31 50	2 1 49	2 34 32	16 51
19	Giov.	8 14 19 6	8 21 10 26	3 5 24	3 33 55	17 47
20	Ven.	8 28 5 56	9 5 5 38	3 59 36	4 21 59	18 45
21	Sab.	9 12 9 29	9 19 17 20	4 40 38	4 55 7	19 42
22	Dom.	9 26 28 56	10 3 43 51	5 5 7	5 10 20	20 38
23	Lun.	10 11 1 35	10 18 21 29	5 10 35	5 5 47	21 34
24	Mart.	10 25 42 47	11 3 4 38	4 55 55	4 41 9	22 28
25	Merc.	11 10 26 8	11 17 46 20	4 21 45	3 58 4	23 21
26	Giov.	11 25 4 18	0 2 19 9	3 30 36	2 59 53	* *
27	Ven.	0 9 30 3	0 16 36 20	2 26 33	1 51 14	0 14
28	Sab.	0 23 37 24	1 0 32 50	1 14 38	0 37 21	1 6
29	Dom.	1 7 22 21	1 14 5 49	0 0 2	0 36 46A	1 58
30	Lun.	1 20 43 13	1 27 14 43	1 12 33A	1 46 51	2 50
31	Mart.	2 3 40 33	2 10 1 4	2 19 19	2 49 37	3 42

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	1 56	12 36B	58 3	57 34	31 41	31 26	20 57	10 27
2	2 51	15 51	57 6	56 39	31 10	30 55	21 35	11 54
3	3 46	18 9	56 14	55 50	30 42	30 29	22 17	12 34
4	4 41	19 26	55 29	55 10	30 17	30 7	23 4	13 29
5	5 34	19 42	54 53	54 38	29 58	29 50	23 55	14 19
6	6 26	19 0	54 26	54 16	29 43	29 38	* *	15 2
7	7 18	17 25	54 9	54 4	29 34	29 31	0 48	15 41
8	8 7	15 3	54 1	54 1	29 29	29 29	1 45	16 14
9	8 56	12 2	54 2	54 6	29 30	29 32	2 43	16 43
10	9 44	8 29	54 11	54 18	29 35	29 39	3 42	17 11
11	10 31	4 31	54 26	54 35	29 43	29 48	4 42	17 37
12	11 19	0 19	54 46	54 58	29 54	30 0	5 44	18 4
13	12 7	3 57A	55 10	55 22	30 7	30 14	6 44	18 31
14	12 56	8 6	55 35	55 49	30 21	30 28	7 48	18 59
15	13 48	11 56	56 3	56 18	30 36	30 44	8 54	19 30
16	14 41	15 14	56 33	56 48	30 52	31 1	9 58	20 5
17	15 38	17 44	57 3	57 19	31 9	31 17	11 3	20 45
18	16 36	19 15	57 36	57 52	31 26	31 35	12 6	21 34
19	17 37	19 34	58 9	58 26	31 45	31 54	13 6	22 29
20	18 38	18 37	58 42	58 59	32 3	32 12	14 0	23 33
21	19 39	16 23	59 14	59 29	32 20	32 28	14 47	* *
22	20 40	13 1	59 42	59 53	32 36	32 42	15 27	0 42
23	21 39	8 46	60 1	60 7	32 46	32 49	16 6	1 55
24	22 38	3 56	60 11	60 11	32 51	32 51	16 38	3 11
25	23 35	1 8B	60 8	60 1	32 50	32 46	17 13	4 27
26	* *	* *	59 51	59 38	32 40	32 33	17 45	5 39
27	0 32	6 3	59 22	59 3	32 24	32 14	18 17	6 53
28	1 28	10 31	58 42	58 19	32 3	31 50	18 52	8 4
29	2 24	14 15	57 55	57 30	31 37	31 23	19 29	9 13
30	3 21	17 3	57 5	56 40	31 10	30 56	20 11	10 18
31	4 17	18 49	56 16	55 54	30 43	30 31	20 57	11 16

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente $8^h\ 3^t$ *Occidente*

| | | |

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
3	Primo quarto	5h 49′
11	Luna piena	6 32
18	Ultimo quarto	9 1
25	Luna nuova	5 25
	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
3	51 □ 5.ª	9 46
3	54 λ □ 4. 5.ª	11 56
3	68 k □ 5.ª	19 38
5	65 α² ♋ 5.ª	14 9
11	α ♍ Spica 1.ª	6 58
12	9 α² ♎ 3.ª	21 52
14	8 β ♏ Pree. 2.ª	6 11
14	14 ν ♏ 4.ª	8 46
14	4 ψ Ofiuco 5.ª	13 52
15	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	13 13
17	44 ρ¹ ♐ 3.ª	14 13
17	55 e² ♐ 5.ª	23 4
18	9 β ♑ 3. 4.ª	14 59
19	13 ν ♒ 5.ª	11 43
22	18 λ ♓ 5.ª	7 19
23	63 δ ♓ 5.ª	13 14
23	71 ε ♓ 4.ª	19 4
27	68 δ² ♉ 5.ª	12 26
27	74 ε ♉ 4.ª	14 11
28	104 m ♉ 5.ª	7 17
30	51 □ 5.ª	18 2
30	54 λ □ 4. 5.ª	20 11

GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*
	I. SATELLITE.
	h ′ ″
* 2	7 11 58 em.
4	1 40 53
5	20 9 40
7	14 38 33
9	9 7 20
11	3 36 13
	II. SATELLITE.
1	16 31 50 em.
5	5 49 59
8	19 8 4
	III. SATELLITE.
5	18 2 43 imm.
5	20 4 29 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
91	1	Merc.	0 4 0,58	0 41 46,40	0 37 45,17	5 39	6 21
92	2	Giov.	0 3 42,42	0 45 24,75	0 41 41,72	5 37	6 23
93	3	Ven.	0 3 24,37	0 49 3,20	0 45 38,27	5 36	6 24
94	4	Sab.	0 3 6,46	0 52 41,79	0 49 34,82	5 34	6 26
95	5	Dom.	0 2 48,70	0 56 20,53	0 53 31,37	5 33	6 27
96	6	Lun.	0 2 31,09	0 59 59,43	0 57 27,93	5 31	6 29
97	7	Mart.	0 2 13,64	1 3 38,49	1 1 24,48	5 30	6 30
98	8	Merc.	0 1 56,42	1 7 17,77	1 5 21,03	5 28	6 32
99	9	Giov.	0 1 39,44	1 10 57,29	1 9 17,58	5 26	6 34
100	10	Ven.	0 1 22,68	1 14 37,04	1 13 14,14	5 24	6 36
101	11	Sab.	0 1 6,18	1 18 17,06	1 17 10,70	5 23	6 37
102	12	Dom.	0 0 49,98	1 21 57,37	1 21 7,25	5 21	6 39
103	13	Lun.	0 0 34,08	1 25 37,97	1 25 3,80	5 19	6 41
104	14	Mart.	0 0 18,51	1 29 18,91	1 29 0,35	5 18	6 42
105	15	Merc.	0 0 3,28	1 33 0,20	1 32 56,91	5 16	6 44
106	16	Giov.	23 59 48,43	1 36 41,86	1 36 53,46	5 14	6 46
107	17	Ven.	23 59 33,96	1 40 23,90	1 40 50,01	5 13	6 47
108	18	Sab.	23 59 19,90	1 44 6,35	1 44 46,56	5 11	6 49
109	19	Dom.	23 59 6,25	1 47 49,21	1 48 43,11	5 10	6 50
110	20	Lun.	23 58 53,00	1 51 32,49	1 52 39,67	5 8	6 52
111	21	Mart.	23 58 40,20	1 55 16,22	1 56 36,23	5 7	6 53
112	22	Merc.	23 58 27,86	1 59 0,39	2 0 32,78	5 5	6 54
113	23	Giov.	23 58 15,98	2 2 45,03	2 4 29,53	5 3	6 55
114	24	Ven.	23 58 4,56	2 6 30,14	2 8 25,89	5 2	6 58
115	25	Sab.	23 57 53,64	2 10 15,73	2 12 22,44	5 1	6 59
116	26	Dom.	23 57 43,21	2 14 1,82	2 16 18,99	5 0	7 0
117	27	Lun.	23 57 33,25	2 17 48,40	2 20 15,55	4 58	7 2
118	28	Mart.	23 57 23,80	2 21 35,47	2 24 12,10	4 57	7 3
119	29	Merc.	23 57 14,87	2 25 23,06	2 28 8,65	4 56	7 4
120	30	Giov.	23 57 6,42	2 29 11,15	2 32 5,21	4 54	7 6

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	° ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	0 11 21 28,4	4 29 50,6	+ 0,97	0,60A	0,0000128
2	0 12 20 35,6	4 52 56,8	0,96	0,72	0,0001351
3	0 13 19 40,5	5 15 57,8	0,96	0,80	0,0002571
4	0 14 18 43,1	5 38 53,1	0,95	0,85	0,0003789
5	0 15 17 43,3	6 1 42,3	0,95	0,87	0,0005006
6	0 16 16 41,3	6 24 25,2	0,95	0,87	0,0006223
7	0 17 15 37,0	6 47 1,5	0,94	0,85	0,0007441
8	0 18 14 30,4	7 9 30,7	0,94	0,79	0,0008659
9	0 19 13 21,7	7 31 52,7	0,93	0,70	0,0009878
10	0 20 12 10,8	7 54 7,0	0,92	0,59	0,0011100
11	0 21 10 57,9	8 16 13,4	0,92	0,46	0,0012324
12	0 22 9 43,0	8 38 11,5	0,91	0,34	0,0013549
13	0 23 8 26,2	9 0 1,0	0,91	0,21	0,0014775
14	0 24 7 7,5	9 21 41,6	0,90	0,08	0,0016002
15	0 25 5 47,1	9 43 13,0	0,89	0,04B	0,0017228
16	0 26 4 25,0	10 4 35,0	0,88	0,14	0,0018453
17	0 27 3 1,2	10 25 46,9	0,88	0,21	0,0019674
18	0 28 1 35,7	10 46 48,8	0,87	0,25	0,0020891
19	0 29 0 8,6	11 7 40,2	0,86	0,27	0,0022101
20	0 29 58 40,0	11 28 20,7	0,86	0,27	0,0023302
21	1 0 57 9,7	11 48 49,9	0,85	0,22	0,0024495
22	1 1 55 37,8	12 9 7,6	0,85	0,14	0,0025678
23	1 2 54 4,2	12 29 13,6	0,84	0,05	0,0026848
24	1 3 52 29,0	12 49 7,4	0,83	0,06A	0,0028004
25	1 4 50 52,0	13 8 48,6	0,82	0,19	0,0029145
26	1 5 49 13,3	13 28 16,7	0,81	0,33	0,0030272
27	1 6 47 32,7	13 47 31,6	0,80	0,46	0,0031384
28	1 7 45 50,2	14 6 33,0	0,79	0,58	0,0032480
29	1 8 44 5,9	14 25 20,5	0,78	0,69	0,0033560
30	1 9 42 19,6	14 43 53,5	0,77	0,78	0,0034625

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Merc.	2 16 16 40	2 22 27 49	3 17 29A	3 42 42A	4 33
2	Giov.	2 28 35 5	3 4 39 0	4 5 6	4 24 32	5 23
3	Ven.	3 10 40 10	3 16 39 11	4 40 54	4 54 6	6 11
4	Sab.	3 22 36 38	3 28 33 9	5 4 4	5 10 45	6 57
5	Dom.	4 4 29 16	4 10 25 34	5 14 5	5 14 5	7 42
6	Lun.	4 16 22 33	4 22 20 42	5 10 41	5 3 56	8 26
7	Mart.	4 28 20 30	5 4 22 20	4 53 50	4 40 25	9 10
8	Merc.	5 10 26 35	5 16 33 31	4 23 46	4 3 59	9 53
9	Giov.	5 22 43 27	5 28 56 36	3 41 13	3 15 36	10 37
10	Ven.	6 5 13 6	6 11 33 7	2 47 24	2 16 51	11 23
11	Sab.	6 17 56 42	6 24 23 53	1 44 18	1 10 4	12 10
12	Dom.	7 0 54 40	7 7 28 58	0 34 36	0 1 40B	12 59
13	Lun.	7 14 6 43	7 20 47 48	0 38 15B	1 14 38	13 52
14	Mart.	7 27 32 7	8 4 19 29	1 50 16	2 24 38	14 46
15	Merc.	8 11 9 48	8 18 2 52	2 57 10	3 27 22	15 43
16	Giov.	8 24 58 33	9 1 56 41	3 54 44	4 18 46	16 40
17	Ven.	9 8 57 4	9 15 59 30	4 39 6	4 55 19	17 37
18	Sab.	9 23 3 45	10 0 9 34	5 7 9	5 14 21	18 32
19	Dom.	10 7 16 41	10 14 24 46	5 16 45	5 14 17	19 27
20	Lun.	10 21 33 29	10 28 42 27	5 6 57	4 54 52	20 19
21	Mart.	11 5 51 15	11 12 59 26	4 38 13	4 17 16	21 11
22	Merc.	11 20 6 32	11 27 12 5	3 52 23	3 24 1	22 3
23	Giov.	0 4 15 35	0 11 16 34	2 52 39	2 18 51	22 54
24	Ven.	0 18 14 33	0 25 9 7	1 43 13	1 6 19	23 46
25	Sab.	1 1 59 54	1 8 46 33	0 28 48	0 8 46A	* *
26	Dom.	1 15 28 49	1 22 6 32	0 45 48A	1 21 47	0 38
27	Lun.	1 28 39 37	2 5 8 3	1 56 17	2 28 51	1 30
28	Mart.	2 11 31 53	2 17 51 19	2 59 9	3 26 53	2 22
29	Merc.	2 24 6 33	3 0 17 52	3 51 50	4 13 47	3 13
30	Giov.	3 6 25 40	3 12 30 19	4 32 36	4 48 10	4 3

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo di medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo di medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	5 12	19 32B	55 33	55 14	30 20	30 9	21 47	12 9
2	6 5	19 13	54 57	54 43	30 0	29 52	22 40	12 56
3	6 58	17 58	54 31	54 21	29 46	29 40	23 35	13 37
4	7 48	15 54	54 14	54 10	29 36	29 34	* *	14 12
5	8 37	13 8	54 8	54 9	29 33	29 34	0 33	14 43
6	9 25	9 48	54 12	54 18	29 36	29 39	1 31	15 13
7	10 13	6 1	54 25	54 35	29 43	29 48	2 32	15 40
8	11 0	1 55	54 46	54 59	29 54	30 1	3 32	16 6
9	11 48	2 20A	55 13	55 28	30 9	30 17	4 32	16 34
10	12 38	6 34	55 44	56 0	30 26	30 35	5 36	17 2
11	13 29	10 34	56 17	56 33	30 44	30 53	6 42	17 31
12	14 23	14 7	56 49	57 5	31 1	31 10	7 48	18 4
13	15 19	16 57	57 20	57 34	31 18	31 26	8 55	18 44
14	16 18	18 48	57 48	58 1	31 33	31 40	9 59	19 30
15	17 18	19 30	58 13	58 24	31 47	31 53	11 1	20 25
16	18 20	18 56	58 35	58 45	31 59	32 4	11 57	21 26
17	19 21	17 6	58 54	59 1	32 9	32 13	12 45	22 34
18	20 20	14 8	59 8	59 13	32 17	32 20	13 27	23 43
19	21 19	10 16	59 18	59 21	32 22	32 24	14 5	* *
20	22 15	5 46	59 22	59 22	32 25	32 25	14 37	0 56
21	23 11	0 55	59 21	59 17	32 24	32 22	15 10	2 10
22	0 7	3 57B	59 12	59 5	32 19	32 15	15 43	3 22
23	1 2	8 33	58 56	58 44	32 10	32 4	16 14	4 33
24	1 58	12 35	58 31	58 16	31 57	31 49	16 48	5 44
25	* *	* *	58 0	57 42	31 40	31 30	17 24	6 53
26	2 54	15 50	57 23	57 3	31 20	31 9	18 4	7 59
27	3 51	18 5	56 42	56 22	30 57	30 46	18 48	9 1
28	4 47	19 17	56 2	55 43	30 35	30 25	19 37	9 58
29	5 42	19 25	55 25	55 8	30 15	30 6	20 30	10 48
30	6 36	18 34	54 53	54 41	29 58	29 51	21 25	11 33

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente $7^h\ 37'$ *Occidente*

1	4.				.3				○	2.										10
2	.4				2.		1.		○	.3										
3	.4								○		.1			3						20
4			.4			1.			○				2.		3.					
5					.4		2.		○	3.	.1									
6					3	2	.1	.4	○											
7				3.					○	1.	.2	.4								
8					.3				○		2.					.4				10
9	30					2.		1.	○										.4	
10								.2	○		.1			.3					.4	

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
3	Primo quarto	0h 28′
10	Luna piena	18 43
17	Ultimo quarto	14 3
24	Luna nuova	17 21

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	68 k □ 5.ª	3 48
8	α ♍ Spica 1.ª	15 29
10	9 α² ♎ 3.ª	5 57
11	8 β ♏ prec. 2.ª	13 43
11	14 ν ♏ 4.ª	16 13
11	4 ↓ Ofiuco 5.ª	21 13
14	44 ρ¹ ♐ 5.ª	20 0
15	55 e² ♐ 5.ª	4 42
15	9 β ♑ 3. 4.ª	20 23
16	13 γ ♒ 5.ª	17 5
19	18 λ ♓ 5.ª	13 28
20	63 δ ♓ 5.ª	20 3
21	71 e ♓ 4.ª	2 0
24	68 δ³ ♉ 5.ª	20 46
24	74 e ♉ 4.ª	22 30
25	104 m ♉ 4.ª	15 37
28	51 □ 5.ª	2 9
28	54 λ □ 4. 5.ª	4 18
28	68 k □ 5.ª	11 52

I SATELLITI DI GIOVE NON SONO VISIBILI IN QUESTO MESE.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	TEMPO medio a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì vero.	TEMPO sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
121	1	Ven.	23 56 58,49	2 32 59,77	2 36 1,77	4 53	7 7
122	2	Sab.	23 56 51,09	2 36 48,90	2 39 58,32	4 52	7 8
123	3	Dom.	23 56 44,21	2 40 38,56	2 43 54,88	4 50	7 10
124	4	Lun.	23 56 37,87	2 44 28,75	2 47 51,43	4 49	7 11
125	5	Mart.	23 56 32,05	2 48 19,47	2 51 47,99	4 48	7 12
126	6	Merc.	23 56 26,79	2 52 10,75	2 55 44,54	4 46	7 14
127	7	Giov.	23 56 22,08	2 56 2,58	2 59 41,10	4 45	7 15
128	8	Ven.	23 56 17,93	2 59 54,97	3 3 37,65	4 44	7 16
129	9	Sab.	23 56 14,32	3 3 47,91	3 7 34,21	4 43	7 17
130	10	Dom.	23 56 11,28	3 7 41,42	3 11 30,76	4 41	7 19
131	11	Lun.	23 56 8,83	3 11 35,52	3 15 27,32	4 40	7 20
132	12	Mart.	23 56 6,98	3 15 30,21	3 19 23,87	4 39	7 21
133	13	Merc.	23 56 5,66	3 19 25,45	3 23 20,43	4 38	7 22
134	14	Giov.	23 56 4,95	3 23 21,29	3 27 16,98	4 37	7 23
135	15	Ven.	23 56 4,81	3 27 17,71	3 31 13,54	4 36	7 24
136	16	Sab.	23 56 5,28	3 31 14,73	3 35 10,09	4 34	7 26
137	17	Dom.	23 56 6,33	3 35 12,34	3 39 6,65	4 33	7 27
138	18	Lun.	23 56 7,96	3 39 10,53	3 43 3,20	4 32	7 28
139	19	Mart.	23 56 10,18	3 43 9,31	3 46 59,76	4 31	7 29
140	20	Merc.	23 56 12,96	3 47 8,65	3 50 56,31	4 30	7 30
141	21	Giov.	23 56 16,30	3 51 8,55	3 54 52,86	4 29	7 31
142	22	Ven.	23 56 20,20	3 55 9,02	3 58 49,42	4 28	7 32
143	23	Sab.	23 56 24,64	3 59 10,03	4 2 45,98	4 27	7 33
144	24	Dom.	23 56 29,62	4 3 11,58	4 6 42,53	4 26	7 34
145	25	Lun.	23 56 35,12	4 7 13,65	4 10 39,09	4 25	7 35
146	26	Mart.	23 56 41,12	4 11 16,23	4 14 35,65	4 24	7 36
147	27	Merc.	23 56 47,62	4 15 19,29	4 18 32,20	4 23	7 37
148	28	Giov.	23 56 54,58	4 19 22,83	4 22 28,76	4 22	7 38
149	29	Ven.	23 57 2,00	4 23 26,83	4 26 25,32	4 21	7 39
150	30	Sab.	23 57 9,85	4 27 31,25	4 30 21,87	4 20	7 40
151	31	Dom.	23 57 18,11	4 31 36,09	4 34 18,42	4 19	7 41

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	1 10 40 31,4	15 2 12,0	+ 0,76	0,84A	0,0035675
2	1 11 38 41,1	15 20 15,8	0,75	0,87	0,0036712
3	1 12 36 48,9	15 38 4,3	0,74	0,87	0,0037738
4	1 13 34 54,6	15 55 37,1	0,73	0,84	0,0038752
5	1 14 32 58,5	16 12 54,0	0,72	0,79	0,0039755
6	1 15 31 0,4	16 29 54,7	0,71	0,70	0,0040749
7	1 16 29 0,5	16 46 39,1	0,70	0,59	0,0041735
8	1 17 26 58,7	17 3 6,7	0,68	0,47	0,0042713
9	1 18 24 55,2	17 19 17,2	0,67	0,33	0,0043682
10	1 19 22 50,0	17 35 10,4	0,66	0,19	0,0044643
11	1 20 20 43,4	17 50 46,0	0,65	0,06	0,0045597
12	1 21 18 35,3	18 6 3,7	0,63	0,06B	0,0046544
13	1 22 16 25,7	18 21 3,1	0,61	0,16	0,0047483
14	1 23 14 14,8	18 35 44,4	0,60	0,24	0,0048414
15	1 24 12 2,7	18 50 7,0	0,59	0,30	0,0049335
16	1 25 9 49,4	19 4 10,5	0.58	0,32	0,0050245
17	1 26 7 35,0	19 17 54,8	0,56	0,31	0,0051143
18	1 27 5 19,4	19 31 19,6	0,55	0,27	0,0052027
19	1 28 3 2,9	19 44 24,6	0,53	0,20	0,0052895
20	1 29 0 45,3	19 57 9,6	0,52	0,11	0,0053746
21	1 29 58 26,7	20 9 34,4	0,51	0,00	0,0054578
22	2 0 56 7,0	20 21 38,6	0,49	0,12A	0,0055390
23	2 1 53 46,3	20 33 21,8	0,48	0,25	0,0056182
24	2 2 51 24,5	20 44 43,9	0,46	0,38	0,0056952
25	2 3 49 1,6	20 55 44,5	0,45	0,50	0,0057701
26	2 4 46 37,4	21 6 23,7	0,44	0,61	0,0058427
27	2 5 44 12,2	21 16 41,3	0,42	0,71	0,0059129
28	2 6 41 45,7	21 26 36,7	0,41	0,77	0,0059809
29	2 7 39 18,0	21 36 9,8	0,39	0,80	0,0060466
30	2 8 36 48,9	21 45 20,6	0,37	0,81	0,0061101
31	2 9 34 18,5	21 54 8,5	0,36	0,79	0,0061715

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezzanotte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Ven.	3 18 32 20	3 24 32 10	3 0 26A	3 9 20A	4 51
2	Sab.	4 0 30 21	4 6 27 27	5 14 51	5 16 58	5 36
3	Dom.	4 12 24 2	4 18 20 41	5 15 41	5 11 2	6 21
4	Lun.	4 24 17 57	5 0 16 26	5 3 2	4 51 43	7 4
5	Mart.	5 6 16 40	5 12 13 13	4 37 11	4 19 29	7 47
6	Merc.	5 18 24 35	5 24 33 15	3 58 44	3 35 3	8 30
7	Giov.	6 0 45 37	6 7 2 5	3 8 37	2 30 38	9 15
8	Ven.	6 13 22 58	6 19 48 31	2 8 21	1 35 4	10 1
9	Sab.	6 26 18 53	7 2 54 9	1 0 12	0 24 1	10 50
10	Dom.	7 9 34 19	7 16 19 17	0 12 53A	0 50 18A	11 42
11	Lun.	7 23 8 50	8 0 2 41	1 26 51	2 2 47	12 37
12	Mart.	8 7 0 27	8 14 1 42	2 37 13	3 9 32	13 36
13	Merc.	8 21 5 56	8 28 12 37	3 39 11	4 5 35	14 33
14	Giov.	9 5 21 10	9 12 31 2	4 28 17	4 46 51	15 31
15	Ven.	9 19 41 39	9 26 52 28	5 0 57	5 10 21	16 28
16	Sab.	10 4 2 59	10 11 12 43	5 14 53	5 14 31	17 23
17	Dom.	10 18 21 17	10 25 28 20	5 9 17	4 59 19	18 16
18	Lun.	11 2 33 32	11 9 36 39	4 44 50	4 26 5	19 8
19	Mart.	11 16 37 28	11 23 35 49	4 3 28	3 37 21	19 58
20	Merc.	0 0 31 34	0 7 24 37	3 8 12	2 36 31	20 48
21	Giov.	0 14 14 52	0 21 2 14	2 2 47	1 27 34	21 38
22	Ven.	0 27 46 38	1 4 27 58	0 51 24	0 14 48	22 29
23	Sab.	1 11 6 10	1 17 41 10	0 21 41A	0 57 54A	23 21
24	Dom.	1 24 12 51	2 0 41 11	1 32 21	2 5 36	0 0
25	Lun.	2 7 6 8	2 13 27 41	2 36 57	3 6 1	0 13
26	Mart.	2 19 45 53	2 26 0 47	3 32 31	3 56 13	1 4
27	Merc.	3 2 12 31	3 8 21 13	4 16 55	4 34 26	1 55
28	Giov.	3 14 27 7	3 20 30 29	4 48 40	4 59 34	2 43
29	Ven.	3 26 31 36	4 2 30 50	5 7 4	5 11 10	3 30
30	Sab.	4 8 28 35	4 14 25 18	5 11 53	5 9 14	4 15
31	Dom.	4 20 21 29	4 26 17 40	5 3 16	4 54 3	4 59

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	7 27	16 48B	54 30	54 22	29 45	29 41	22 21	12 12
2	8 17	14 18	54 16	54 13	29 38	29 36	23 20	12 43
3	9 6	11 11	54 12	54 14	29 35	29 37	* *	13 14
4	9 53	7 36	54 19	54 26	29 39	29 43	0 19	13 41
5	10 40	3 39	54 35	54 46	29 48	29 54	1 19	14 7
6	11 27	0 31A	55 0	55 16	30 2	30 10	2 19	14 33
7	12 16	4 46	55 34	55 52	30 20	30 30	3 20	15 2
8	13 7	8 54	56 12	56 33	30 41	30 52	4 26	15 29
9	14 0	12 42	56 54	57 15	31 4	31 15	5 32	16 2
10	14 56	15 54	57 35	57 54	31 26	31 36	6 39	16 40
11	15 55	18 13	58 12	58 29	31 46	31 56	7 47	17 24
12	16 56	19 24	58 43	58 56	32 4	32 10	8 52	18 17
13	17 59	19 17	59 6	59 15	32 16	32 21	9 51	19 16
14	19 1	17 50	59 22	59 26	32 25	32 27	10 43	20 23
15	20 2	15 10	59 28	59 28	32 28	32 28	11 28	21 34
16	21 1	11 31	59 27	59 24	32 27	32 26	12 6	22 47
17	21 58	7 12	59 19	59 13	32 23	32 20	12 41	23 59
18	22 54	2 29	59 7	58 58	32 16	32 11	13 12	* *
19	23 48	2 19B	58 49	58 39	32 6	32 1	13 43	1 12
20	0 42	6 56	58 28	58 16	31 55	31 49	14 15	2 21
21	1 37	11 7	58 4	57 51	31 42	31 35	14 46	3 31
22	2 32	14 38	57 37	57 23	31 27	31 19	15 20	4 40
23	3 27	17 17	57 8	56 53	31 11	31 3	15 57	5 46
24	* *	* *	56 37	56 21	30 55	30 46	16 41	6 50
25	4 23	18 56	56 5	55 49	30 37	30 28	17 28	7 48
26	5 19	19 32	55 33	55 18	30 19	30 11	18 20	8 40
27	6 13	19 5	55 4	54 51	30 4	29 57	19 14	9 28
28	7 6	17 42	54 39	54 29	29 50	29 45	20 11	10 8
29	7 57	15 29	54 20	54 14	29 40	29 36	21 9	10 44
30	8 46	12 36	54 10	54 8	29 34	29 33	22 7	11 14
31	9 34	9 12	54 9	54 12	29 34	29 35	23 7	11 43

I SATELLITI DI GIOVE

NON SONO VISIBILI

IN QUESTO MESE.

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
1	Primo quarto	18h 7′
9	Luna piena	4 13
15	Ultimo quarto	19 15
23	Luna nuova	6 25

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
2	α ♍ Spica 1.ª	14 54
6	9 α² ♎ 3.ª	15 26
7	8 β ♏ Prec. 2.ª	23 3
8	14 ν ♏ 4.ª	1 30
8	4 ψ Ofiuco 5.ª	6 27
11	44 ρ¹ ♐ 3.ª	3 40
12	9 β ♑ 3. 4.ª	3 22
12	13 ν ♒ 5.ª	23 29
15	18 λ ♓ 5.ª	18 52
17	63 δ ♓ 5.ª	1 29
17	71 ε ♓ 4.ª	7 30
21	68 δ³ ♉ 5.ª	3 31
21	74 ε ♉ 4.ª	5 17
21	104 m ♉ 5.ª	22 34
24	54 λ ♋ 4. 5.ª	11 34
24	68 k ♋ 5.ª	19 10
26	65 α² ♌ 5.ª	13 19

GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*	
	I. SATELLITE.	
17	7h 38′ 35″	imm.
19	2 7 6	
20	20 35 41	
22	15 4 11	
24	9 32 43	
26	4 1 12	
27	22 29 45	
29	16 58 15	
	II. SATELLITE.	
18	18 43 7	imm.
22	8 1 52	
25	21 19 51	
29	10 38 40	
	III. SATELLITE.	
23	14 12 32	imm.
23	16 17 36	em.
30	18 12 44	imm.
30	20 18 15	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
152	1	Lun.	23 57 26,79	4 35 41,35	4 38 14,98	4 19	7 41
153	2	Mart.	23 57 35,85	4 39 46,99	4 42 11,54	4 18	7 42
154	3	Merc.	23 57 45,27	4 43 53,00	4 46 8,10	4 18	7 42
155	4	Giov.	23 57 55,05	4 47 59,37	4 50 4,66	4 17	7 43
156	5	Ven.	23 58 5,17	4 52 6,07	4 54 1,21	4 16	7 44
157	6	Sab.	23 58 15,60	4 56 13,09	4 57 57,77	4 16	7 44
158	7	Dom.	23 58 26,32	5 0 20,40	5 1 54,33	4 15	7 45
159	8	Lun.	23 58 37,35	5 4 28,02	5 5 50,89	4 15	7 45
160	9	Mart.	23 58 48,67	5 8 35,92	5 9 47,44	4 14	7 46
161	10	Merc.	23 59 0,23	5 12 44,07	5 13 44,00	4 14	7 46
162	11	Giov.	23 59 12,03	5 16 52,45	5 17 40,55	4 14	7 46
163	12	Ven.	23 59 24,05	5 21 1,06	5 21 37,11	4 13	7 47
164	13	Sab.	23 59 36,28	5 25 9,88	5 25 33,67	4 13	7 47
165	14	Dom.	23 59 48,69	5 29 18,88	5 29 30,22	4 13	7 47
166	15	Lun.	0 0 1,27	5 33 28,05	5 33 26,78	4 13	7 47
167	16	Mart.	0 0 13,99	5 37 37,36	5 37 23,33	4 13	7 47
168	17	Merc.	0 0 26,84	5 41 46,80	5 41 19,89	4 12	7 48
169	18	Giov.	0 0 39,77	5 45 56,33	5 45 16,45	4 12	7 48
170	19	Ven.	0 0 52,80	5 50 5,94	5 49 13,00	4 12	7 48
171	20	Sab.	0 1 5,87	5 54 15,60	5 53 9,55	4 12	7 48
172	21	Dom.	0 1 18,97	5 58 25,29	5 57 6,11	4 12	7 48
173	22	Lun.	0 1 32,04	6 2 34,96	6 1 2,67	4 12	7 48
174	23	Mart.	0 1 45,10	6 6 44,61	6 4 59,23	4 12	7 48
175	24	Merc.	0 1 58,09	6 10 54,20	6 8 55,79	4 12	7 48
176	25	Giov.	0 2 10,98	6 15 3,69	6 12 52,35	4 12	7 48
177	26	Ven.	0 2 23,74	6 19 13,05	6 16 48,91	4 13	7 47
178	27	Sab.	0 2 36,38	6 23 22,28	6 20 45,47	4 13	7 47
179	28	Dom.	0 2 48,86	6 27 31,35	6 24 42,03	4 13	7 47
180	29	Lun.	0 3 1,15	6 31 40,22	6 28 38,58	4 13	7 47
181	30	Mart.	0 3 13,19	6 35 48,85	6 32 35,13	4 13	7 47

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	2 10 31 46,9	22 2 33,4	+ 0,34	0,74A	0,0062310
2	2 11 29 14,1	22 10 35,4	0,33	0,66	0,0062886
3	2 12 26 40,0	22 18 14,3	0,31	0,55	0,0063445
4	2 13 24 4,7	22 25 29,8	0,29	0,43	0,0063988
5	2 14 21 28,2	22 32 21,6	0,28	0,30	0,0064515
6	2 15 18 50,8	22 38 50,0	0,26	0,16	0,0065027
7	2 16 16 12,3	22 44 54,6	0,25	0,03	0,0065526
8	2 17 13 32,9	22 50 35,2	0,23	0,10B	0,0066011
9	2 18 10 52,6	22 55 51,8	0,21	0,21	0,0066482
10	2 19 8 11,6	23 0 44,4	0,20	0,31	0,0066840
11	2 20 5 30,0	23 5 12,6	0,18	0,36	0,0067387
12	2 21 2 47,7	23 9 16,3	0,16	0,38	0,0067820
13	2 22 0 5,1	23 12 55,7	0,15	0,37	0,0068239
14	2 22 57 22,0	23 16 10,6	0,13	0,34	0,0068643
15	2 23 54 38,6	23 19 0,9	0,12	0,29	0,0069029
16	2 24 51 54,9	23 21 26,5	0,10	0,20	0,0069397
17	2 25 49 11,1	23 23 27,5	0,08	0,09	0,0069745
18	2 26 46 26,9	23 25 3,8	0,06	0,03A	0,0070073
19	2 27 43 42,6	23 26 15,1	0,04	0,16	0,0070379
20	2 28 40 58,2	23 27 1,8	0,03	0,29	0,0070662
21	2 29 38 13,6	23 27 23,7	+ 0,01	0,41	0,0070920
22	3 0 35 28,8	23 27 20,9	− 0,01	0,52	0,0071153
23	3 1 32 43,7	23 26 53,1	0,03	0,61	0,0071361
24	3 2 29 58,4	23 26 0,3	0,05	0,68	0,0071543
25	3 3 27 12,8	23 24 42,9	0,07	0,72	0,0071698
26	3 4 24 26,8	23 23 0,8	0,08	0,74	0,0071827
27	3 5 21 40,5	23 20 53,9	0,10	0,72	0,0071929
28	3 6 18 53,9	23 18 22,4	0,11	0,67	0,0072006
29	3 7 16 6,9	23 15 26,5	0,13	0,58	0,0072060
30	3 8 13 19,5	23 12 6,1	0,14	0,48	0,0072090

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Lun.	5 2 14 23	5 8 12 14	4 41 40A	4 26 11A	5 42
2	Mart.	5 14 11 48	5 20 13 42	4 7 44	3 46 25	6 24
3	Merc.	5 26 18 32	6 2 26 54	3 22 24	2 55 49	7 8
4	Giov.	6 8 39 21	6 14 56 27	2 26 53	1 55 50	7 52
5	Ven.	6 21 18 39	6 27 46 24	1 22 57	0 48 33	8 39
6	Sab.	7 4 20 1	7 10 59 44	0 13 1	0 23 13B	9 29
7	Dom.	7 17 45 43	7 24 57 54	0 59 39B	1 35 43	10 23
8	Lun.	8 1 36 7	8 8 40 2	2 10 52	2 44 27	11 20
9	Mart.	8 15 49 11	8 23 2 53	3 15 49	3 44 22	12 20
10	Merc.	9 0 20 25	9 7 40 52	4 9 29	4 30 39	13 20
11	Giov.	9 15 3 16	9 22 26 40	4 47 24	4 59 23	14 19
12	Ven.	9 29 50 4	10 7 12 32	5 6 23	5 8 17	15 17
13	Sab.	10 14 33 11	10 21 51 16	5 5 7	4 56 59	16 12
14	Dom.	10 29 6 10	11 6 17 21	4 44 8	4 26 55	17 5
15	Lun.	11 13 24 30	11 20 27 21	4 5 42	3 40 57	17 57
16	Mart.	11 27 25 47	0 4 19 48	3 13 9	2 42 49	18 46
17	Merc.	0 11 9 28	0 17 54 57	2 10 28	1 36 36	19 35
18	Giov.	0 24 36 23	1 1 14 0	1 1 45	0 26 24	20 25
19	Ven.	1 7 48 0	1 14 18 35	0 8 56A	0 43 50A	21 16
20	Sab.	1 20 45 56	1 27 10 15	1 17 49	1 50 32	22 7
21	Dom.	2 3 31 39	2 9 50 18	2 21 34	2 50 35	22 58
22	Lun.	2 16 6 19	2 22 19 47	3 17 17	3 41 24	23 48
23	Mart.	2 28 30 51	3 4 39 34	4 2 43	4 21 2	* *
24	Merc.	3 10 46 4	3 16 50 28	4 36 13	4 48 10	0 38
25	Giov.	3 22 52 54	3 28 53 31	4 56 47	5 2 4	1 25
26	Ven.	4 4 52 31	4 10 50 9	5 3 59	5 2 34	2 11
27	Sab.	4 16 46 40	4 22 42 25	4 57 52	4 49 58	2 55
28	Dom.	4 28 37 45	5 4 33 8	4 38 57	4 24 56	3 38
29	Lun.	5 10 29 2	5 16 25 59	4 8 1	3 48 22	4 20
30	Mart.	5 22 24 31	5 28 25 15	3 26 8	3 1 27	5 3

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	10 21	5 24B	54 17	54 26	29 38	29 43	* *	12 9
2	11 7	1 21	54 36	54 49	29 48	29 55	0 6	12 34
3	11 55	2 50A	55 5	55 23	30 4	30 14	1 6	13 2
4	12 44	6 59	55 42	56 4	30 25	30 37	2 8	13 28
5	13 35	10 56	56 27	56 51	30 49	31 2	3 13	13 58
6	14 29	14 27	57 16	57 41	31 16	31 30	4 19	14 33
7	15 27	17 15	58 6	58 30	31 43	31 56	5 27	15 14
8	16 28	19 1	58 52	59 13	32 8	32 20	6 34	16 3
9	17 31	19 32	59 31	59 47	32 30	32 38	7 38	17 2
10	18 36	18 39	59 59	60 8	32 45	32 50	8 35	18 8
11	19 39	16 24	60 13	60 16	32 52	32 54	9 24	19 19
12	20 41	13 0	60 15	60 11	32 53	32 51	10 6	20 35
13	21 40	8 47	60 3	59 54	32 47	32 42	10 44	21 49
14	22 37	4 5	59 42	59 28	32 36	32 28	11 16	23 4
15	23 32	0 45B	59 13	58 57	32 20	32 11	11 50	* *
16	0 26	5 28	58 40	58 22	32 2	31 52	12 20	0 14
17	1 20	9 47	58 5	57 47	31 42	31 33	12 50	1 22
18	2 14	13 30	57 29	57 12	31 23	31 14	13 23	2 31
19	3 9	16 26	56 56	56 40	31 5	30 56	13 58	3 36
20	4 4	18 27	56 24	56 8	30 47	30 39	14 38	4 41
21	4 59	19 26	55 54	55 40	30 31	30 23	15 23	5 41
22	5 53	19 24	55 26	55 13	30 16	30 9	16 12	6 35
23	* *	* *	55 0	54 48	30 2	29 55	17 5	7 23
24	6 47	18 24	54 38	54 28	29 49	29 44	18 0	8 7
25	7 38	16 30	54 19	54 12	29 39	29 35	18 58	8 44
26	8 28	13 53	54 6	54 2	29 32	29 30	19 57	9 16
27	9 16	10 41	54 0	54 0	29 29	29 29	20 55	9 47
28	10 3	7 2	54 2	54 7	29 30	29 33	21 55	10 12
29	10 50	3 7	54 13	54 22	29 36	29 41	22 53	10 37
30	11 36	0 59A	54 33	54 46	29 47	29 54	23 52	11 5

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente $15^h\ 28'$ *Occidente*

| | | |

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
1	Primo quarto	10h 0′
8	Luna piena	11 48
15	Ultimo quarto	2 1
22	Luna nuova	20 40
30	Primo quarto	23 40
	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
2	α ♍ Spica 1.ª	9 25
2	68 i ♍ 5.ª	11 10
5	8 β ♏ prec. 2.ª	9 2
5	14 ν ♏ 4.ª	11 34
5	4 ψ Ofiuco 5.ª	16 32
6	40 ρ Ofiuco 4. 5.ª	15 2
8	44 ρ¹ ♐ 5.ª	13 21
9	9 β ♑ 3. 4.ª	12 31
10	13 ν ♒ 5.ª	8 5
14	63 δ ♓ 5.ª	7 22
14	71 ε ♓ 4.ª	13 16
18	61 δ¹ ♉ 4.ª	7 53
18	74 ε ♉ 4.ª	10 55
19	104 m ♉ 5.ª	4 22
21	54 λ ♋ 4. 5.ª	17 53
22	68 k ♋ 5.ª	1 28
23	65 α² ♌ 5.ª	19 44
29	α ♍ Spica 1.ª	16 44
31	9 α² ♎ 3.ª	9 16

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*				
	I. SATELLITE.				
	h	′	″		
1	11	26	45	imm.	
3	5	55	13		
5	0	23	44		
6	18	52	12		
8	13	20	40		
10	7	49	7		
12	2	17	36		
13	20	46	3		
* 15	15	14	30		
17	9	42	55		
19	4	11	23		
20	22	39	49		
22	17	8	15		
24	11	36	39		
26	6	5	6		
28	0	33	30		
29	19	1	55		
* 31	13	30	18		
	II. SATELLITE.				
2	23	56	39	imm.	
* 6	13	15	31		
10	2	33	30		
* 13	15	52	25		
17	5	10	24		
20	18	29	22		
24	7	47	20		
27	21	6	20		
31	10	24	18		
	III. SATELLITE.				
7	22	12	21	imm.	
8	0	18	21	em.	
15	2	11	49	imm.	
15	4	18	21	em.	
22	6	11	33	imm.	
22	8	18	36	em.	
29	10	11	11	imm.	
29	12	18	48	em.	

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
182	1	Merc.	0 3 24,98	6 39 57,24	6 36 31,69	4 14	7 46
183	2	Giov.	0 3 36,53	6 44 5,37	6 40 28,25	4 14	7 46
184	3	Ven.	0 3 47,79	6 48 13,21	6 44 24,80	4 14	7 46
185	4	Sab.	0 3 58,72	6 52 20,73	6 48 21,36	4 14	7 46
186	5	Dom.	0 4 9,31	6 56 27,91	6 52 17,92	4 15	7 45
187	6	Lun.	0 4 19,60	7 0 34,77	6 56 14,47	4 15	7 45
188	7	Mart.	0 4 29,51	7 4 41,27	7 0 11,03	4 16	7 44
189	8	Merc.	0 4 39,04	7 8 47,39	7 4 7,59	4 16	7 44
190	9	Giov.	0 4 48,20	7 12 53,12	7 8 4,14	4 17	7 43
191	10	Ven.	0 4 56,94	7 16 58,44	7 12 0,69	4 18	7 42
192	11	Sab.	0 5 5,26	7 21 3,35	7 15 57,25	4 18	7 42
193	12	Dom.	0 5 13,17	7 25 7,84	7 19 53,81	4 19	7 41
194	13	Lun.	0 5 20,64	7 29 11,89	7 23 50,37	4 21	7 39
195	14	Mart.	0 5 27,64	7 33 15,47	7 27 46,93	4 21	7 39
196	15	Merc.	0 5 34,18	7 37 18,59	7 31 43,49	4 22	7 38
197	16	Giov.	0 5 40,25	7 41 21,23	7 35 40,05	4 23	7 37
198	17	Ven.	0 5 45,83	7 45 23,39	7 39 36,61	4 24	7 36
199	18	Sab.	0 5 50,92	7 49 25,05	7 43 33,17	4 25	7 35
200	19	Dom.	0 5 55,50	7 53 26,19	7 47 29,72	4 26	7 34
201	20	Lun.	0 5 59,54	7 57 26,79	7 51 26,27	4 27	7 33
202	21	Mart.	0 6 3,05	8 1 26,87	7 55 22,83	4 28	7 32
203	22	Merc.	0 6 6,00	8 5 26,38	7 59 19,38	4 29	7 31
204	23	Giov.	0 6 8,41	8 9 25,35	8 3 15,94	4 30	7 30
205	24	Ven.	0 6 10,23	8 13 23,73	8 7 12,49	4 31	7 29
206	25	Sab.	0 6 11,46	8 17 21,52	8 11 9,05	4 32	7 28
207	26	Dom.	0 6 12,09	8 21 18,71	8 15 5,60	4 33	7 27
208	27	Lun	0 6 12,12	8 25 15,30	8 19 2,16	4 34	7 26
209	28	Mart.	0 6 11,55	8 29 11,28	8 22 58,71	4 35	7 25
210	29	Merc.	0 6 10,35	8 33 6,63	8 26 55,27	4 36	7 24
211	30	Giov.	0 6 8,55	8 37 1,37	8 30 51,82	4 37	7 23
212	31	Ven.	0 6 6,10	8 40 55,48	8 34 48,38	4 38	7 22

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1′ nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	s ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	3 9 10 31,8	23 8 21,2	− 0,16	0,37A	0,0072098
2	3 10 7 43,8	23 4 12,0	0,18	0,24	0,0072086
3	3 11 4 55,5	22 59 38,6	0,20	0,10	0,0072053
4	3 12 2 6,8	22 54 41,4	0,21	0,03B	0,0072004
5	3 12 59 17,9	22 49 20,2	0,23	0,16	0,0071939
6	3 13 56 28,9	22 43 35,1	0,24	0,27	0,0071856
7	3 14 53 40,0	22 37 26,5	0,25	0,36	0,0071757
8	3 15 50 51,1	22 30 54,3	0,27	0,42	0,0071645
9	3 16 48 2,3	22 23 58,8	0,29	0,46	0,0071519
10	3 17 45 13,8	22 16 40,0	0,30	0,47	0,0071378
11	3 18 42 25,7	22 8 58,2	0,32	0,45	0,0071223
12	3 19 39 37,9	22 0 53,8	0,33	0,39	0,0071053
13	3 20 36 50,7	21 52 26,5	0,35	0,31	0,0070867
14	3 21 34 4,0	21 43 36,6	0,37	0,21	0,0070664
15	3 22 31 18,0	21 34 24,5	0,38	0,10	0,0070443
16	3 23 28 32,7	21 24 50,4	0,40	0,03A	0,0070203
17	3 24 25 48,1	21 14 54,3	0,41	0,16	0,0069943
18	3 25 23 4,3	21 4 36,4	0,43	0,29	0,0069663
19	3 26 20 21,2	20 53 57,1	0,45	0,41	0,0069360
20	3 27 17 38,8	20 42 56,6	0,46	0,51	0,0069033
21	3 28 14 57,2	20 31 35,0	0,48	0,59	0,0068682
22	3 29 12 16,5	20 19 52,7	0,50	0,64	0,0068306
23	4 0 9 36,3	20 7 50,0	0,51	0,65	0,0067904
24	4 1 6 56,8	19 55 27,0	0,52	0,64	0,0067476
25	4 2 4 18,1	19 42 44,2	0,53	0,60	0,0067024
26	4 3 1 39,9	19 29 41,7	0,55	0,53	0,0066546
27	4 3 59 2,3	19 16 19,8	0,57	0,44	0,0066044
28	4 4 56 25,3	19 2 38,7	0,58	0,33	0,0065520
29	4 5 53 48,8	18 48 38,9	0,59	0,19	0,0064973
30	4 6 51 12,9	18 34 20,6	0,60	0,06	0,0064405
31	4 7 48 37,6	18 19 43,9	0,62	0,08B	0,0063820

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		° ° ′ ″	° ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Merc.	6 4 28 47	6 10 35 45	2 34 33A	2 5 36A	5 46
2	Giov.	6 16 46 47	6 23 2 31	1 34 52	1 2 37	6 31
3	Ven.	6 29 23 32	7 5 50 24	0 29 9	0 5 11B	7 18
4	Sab.	7 12 23 37	7 19 3 35	0 39 59B	1 14 48	8 9
5	Dom.	7 25 50 38	8 2 44 53	1 49 9	2 22 28	9 4
6	Lun.	8 9 46 21	8 16 54 48	2 54 10	3 23 39	10 2
7	Mart.	8 24 9 48	9 1 30 43	3 50 17	4 13 26	11 2
8	Merc.	9 8 56 42	9 16 26 43	4 32 33	4 47 8	12 3
9	Giov.	9 23 59 35	10 1 34 1	4 56 49	5 1 20	13 3
10	Ven.	10 9 8 41	10 16 42 16	5 0 33	4 54 31	14 1
11	Sab.	10 24 13 35	11 1 41 30	4 43 24	4 27 30	14 57
12	Dom.	11 9 5 7	11 16 23 38	4 7 14	3 43 7	15 50
13	Lun.	11 23 36 33	0 0 43 32	3 15 43	2 45 35	16 42
14	Mart.	0 7 44 27	0 14 39 16	2 13 21	1 39 35	17 33
15	Merc.	0 21 28 11	0 28 11 26	1 4 52	0 29 42	18 23
16	Giov.	1 4 49 21	1 11 22 18	0 5 24A	0 39 59A	19 14
17	Ven.	1 17 50 41	1 24 14 54	1 13 38	1 45 57	20 4
18	Sab.	2 0 35 21	2 6 52 24	2 16 36	2 45 17	20 55
19	Dom.	2 13 6 24	2 19 17 40	3 11 43	3 35 38	21 45
20	Lun.	2 25 26 31	3 1 33 12	3 56 52	4 15 12	22 34
21	Mart.	3 7 37 57	3 13 40 57	4 30 31	4 42 41	23 22
22	Merc.	3 19 42 26	3 25 42 32	4 51 36	4 57 15	* *
23	Giov.	4 1 41 24	4 7 39 11	4 59 35	4 58 36	0 8
24	Ven.	4 13 36 3	4 19 32 8	4 54 22	4 46 56	0 53
25	Sab.	4 25 27 40	5 1 22 52	4 36 24	4 22 52	1 36
26	Dom.	5 7 18 0	5 13 13 24	4 6 29	3 47 24	2 19
27	Lun.	5 19 9 25	5 25 6 29	3 25 47	3 1 50	3 1
28	Mart.	6 1 5 3	6 7 5 39	2 35 46	2 7 47	3 44
29	Merc.	6 13 8 49	6 19 15 7	1 38 8	1 7 5	4 27
30	Giov.	6 25 25 8	7 1 39 30	0 34 55	0 1 56	5 12
31	Ven.	7 7 58 49	7 14 23 41	0 31 30B	1 5 2B	6 0

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	PARALLASSE equatoriale della Luna a mezza notte media.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	DIAMETRO orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	12 23	5 6A	55 2	55 20	30 3	30 12	* *	11 32
2	13 12	9 5	55 40	56 3	30 23	30 36	0 56	11 59
3	14 4	12 45	56 27	56 53	30 49	31 3	2 0	12 30
4	14 59	15 53	57 20	57 48	31 18	31 33	3 6	13 7
5	15 57	18 11	58 16	58 44	31 49	32 4	4 14	13 51
6	17 0	19 24	59 11	59 36	32 19	32 32	5 19	14 44
7	18 4	19 15	59 59	60 19	32 45	32 56	6 20	15 45
8	19 9	17 41	60 35	60 48	33 5	33 12	7 14	16 57
9	20 13	14 47	60 56	60 59	33 16	33 17	8 1	18 12
10	21 16	10 48	60 59	60 54	33 17	33 15	8 42	19 29
11	22 15	6 8	60 45	60 32	33 10	33 3	9 16	20 47
12	23 13	1 10	60 16	59 57	32 54	32 44	9 49	22 1
13	0 9	3 44B	59 36	59 14	32 32	32 20	10 23	23 11
14	1 3	8 17	58 50	58 26	32 7	31 54	10 54	* *
15	1 58	12 15	58 2	57 39	31 41	31 28	11 26	0 21
16	2 52	15 28	57 16	56 54	31 16	31 4	12 1	1 28
17	3 47	17 47	56 33	56 14	30 52	30 42	12 39	2 34
18	4 42	19 7	55 55	55 39	30 32	30 23	13 22	3 34
19	5 36	19 27	55 23	55 9	30 14	30 6	14 9	4 31
20	6 29	18 48	54 55	54 43	29 59	29 52	15 0	5 21
21	7 21	17 15	54 33	54 23	29 47	29 42	15 54	6 5
22	* *	* *	54 15	54 9	29 37	29 33	16 51	6 45
23	8 11	14 55	54 3	53 58	29 30	29 28	17 49	7 19
24	9 0	11 56	53 55	53 54	29 26	29 25	18 47	7 49
25	9 48	8 28	53 54	53 55	29 25	29 26	19 47	8 17
26	10 34	4 39	53 59	54 4	29 28	29 31	20 47	8 43
27	11 20	0 39	54 11	54 20	29 35	29 40	21 45	9 8
28	12 7	3 25A	54 31	54 44	29 46	29 53	22 45	9 35
29	12 54	7 24	54 59	55 16	30 1	30 10	23 47	10 2
30	13 44	11 8	55 35	55 57	30 21	30 33	* *	10 30
31	14 36	14 26	56 20	56 43	30 45	30 59	0 50	11 4

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente $14^h\ 48'$ *Occidente*

| | | |

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
6	Luna piena	18h 36′
13	Ultimo quarto	11 28
21	Luna nuova	12 2
29	Primo quarto	10 55

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	14 ν ♏ 4.ª	20 48
2	4 ψ Ofiuco 5.ª	1 57
5	44 ρ¹ ♐ 5.ª	0 0
5	9 β ♑ 3. 4.ª	23 10
6	13 ν ♒ 5.ª	18 31
10	71 ε ♓ 4.ª	20 54
14	61 δ¹ ♉ 4.ª	13 39
14	64 δ² ♉ 4. 5.ª	14 7
14	68 δ³ ♉ 5.ª	14 54
15	104 m ♉ 5.ª	10 2
17	51 □ 5.ª	21 28
17	54 λ □ 4. 5.ª	23 38
18	68 k □ 5.ª	7 17
20	65 α² ♋ 5.ª	1 41
23	91 ι ♌ 4. 5.ª	13 22
25	α ♍ Spica 1.ª	13 5
27	100 λ ♍ 4.ª	0 17
27	9 α² ♎ 3.ª	15 49
29	14 ν ♏ 4.ª	4 16

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*			
	I. SATELLITE.			
	h	′	″	
2	7	58	43	imm.
4	2	27	7	
5	20	55	30	
* 7	15	23	53	
9	9	52	17	
11	4	20	40	
12	22	49	2	
14	17	17	24	
* 16	11	45	47	
18	6	14	10	
20	0	42	31	
21	19	10	53	
* 23	13	39	15	
25	8	7	37	
27	2	35	58	
28	21	4	19	
* 30	15	32	41	
	II. SATELLITE.			
3	23	43	20	imm.
* 7	13	1	18	
11	2	20	21	
* 14	15	38	18	
18	4	57	22	
21	18	15	18	
25	7	34	22	
28	20	52	18	
	III. SATELLITE.			
* 5	14	11	20	imm.
* 5	16	19	33	em.
12	18	10	50	imm.
12	20	19	40	em.
19	22	10	18	imm.
20	0	19	46	em.
27	2	9	19	imm.
27	4	19	27	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
213	1	Sab.	0 6 3,05	8 44 48,97	8 38 44,93	4 40	7 20
214	2	Dom.	0 5 59,37	8 48 41,84	8 42 41,49	4 42	7 18
215	3	Lun.	0 5 55,07	8 52 34,08	8 46 38,04	4 43	7 17
216	4	Mart.	0 5 50,13	8 56 25,69	8 50 34,60	4 44	7 16
217	5	Merc.	0 5 44,60	9 0 16,70	8 54 31,15	4 45	7 15
218	6	Giov.	0 5 38,46	9 4 7,10	8 58 27,71	4 46	7 14
219	7	Ven.	0 5 31,74	9 7 56,91	9 2 24,26	4 48	7 12
220	8	Sab.	0 5 24,41	9 11 46,12	9 6 20,82	4 49	7 11
221	9	Dom.	0 5 16,49	9 15 34,74	9 10 17,38	4 50	7 10
222	10	Lun.	0 5 8,04	9 19 22,81	9 14 13,93	4 52	7 8
223	11	Mart.	0 4 59,00	9 23 10,30	9 18 10,48	4 53	7 7
224	12	Merc.	0 4 49,42	9 26 57,24	9 22 7,03	4 55	7 5
225	13	Giov.	0 4 39,29	9 30 43,64	9 26 3,59	4 56	7 4
226	14	Ven.	0 4 28,64	9 34 29,51	9 30 0,14	4 58	7 2
227	15	Sab.	0 4 17,46	9 38 14,86	9 33 56,70	4 59	7 1
228	16	Dom.	0 4 5,78	9 41 59,70	9 37 53,25	5 0	7 0
229	17	Lun.	0 3 53,59	9 45 44,03	9 41 49,80	5 1	6 59
230	18	Mart.	0 3 40,90	9 49 27,86	9 45 46,36	5 3	6 57
231	19	Merc.	0 3 27,71	9 53 11,20	9 49 42,92	5 4	6 56
232	20	Giov.	0 3 14,07	9 56 54,07	9 53 39,47	5 5	6 55
233	21	Ven.	0 2 59,95	10 0 36,46	9 57 36,02	5 7	6 53
234	22	Sab.	0 2 45,36	10 4 18,39	10 1 32,57	5 8	6 52
235	23	Dom.	0 2 30,34	10 7 59,88	10 5 29,13	5 10	6 50
236	24	Lun.	0 2 14,87	10 11 40,92	10 9 25,68	5 11	6 49
237	25	Mart.	0 1 58,97	10 15 21,53	10 13 22,23	5 13	6 47
238	26	Merc.	0 1 42,65	10 19 1,71	10 17 18,78	5 14	6 46
239	27	Giov.	0 1 25,93	10 22 41,49	10 21 15,33	5 16	6 44
240	28	Ven.	0 1 8,80	10 26 20,87	10 25 11,89	5 17	6 43
241	29	Sab.	0 0 51,26	10 29 59,85	10 29 8,45	5 19	6 41
242	30	Dom.	0 0 33,28	10 33 38,47	10 33 5,00	5 21	6 39
243	31	Lun.	0 0 15,14	10 37 16,73	10 37 1,55	5 22	6 38

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione boreale del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	° ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	4 8 46 2,9	18 4 49,2	− 0,63	0,21B	0,0063216
2	4 9 43 28,8	17 49 36,9	0,64	0,33	0,0062595
3	4 10 40 55,4	17 34 7,3	0,65	0,43	0,0061959
4	4 11 38 22,8	17 18 20,6	0,66	0,50	0,0061308
5	4 12 35 51,0	17 2 17,1	0,68	0,54	0,0060645
6	4 13 33 20,2	16 45 57,0	0,69	0,55	0,0059970
7	4 14 30 50,3	16 29 20,8	0,70	0,53	0,0059283
8	4 15 28 21,6	16 12 28,6	0,71	0,48	0,0058586
9	4 16 25 54,0	15 55 20,8	0,72	0,40	0,0057879
10	4 17 23 27,7	15 37 57,5	0,73	0,30	0,0057160
11	4 18 21 2,7	15 20 19,2	0,74	0,20	0,0056428
12	4 19 18 39,1	15 2 26,1	0,75	0,08	0,0055685
13	4 20 16 16,9	14 44 18,4	0,76	0,06A	0,0054927
14	4 21 13 56,4	14 25 56,6	0,77	0,19	0,0054156
15	4 22 11 37,5	14 7 20,9	0,78	0,31	0,0053368
16	4 23 9 20,1	13 48 31,6	0,79	0,42	0,0052564
17	4 24 7 4,3	13 29 29,1	0,80	0,49	0,0051743
18	4 25 4 50,1	13 10 13,6	0,81	0,54	0,0050905
19	4 26 2 37,6	12 50 45,2	0,82	0,56	0,0050045
20	4 27 0 26,7	12 31 4,7	0,83	0,55	0,0049166
21	4 27 58 17,2	12 11 12,3	0,83	0,52	0,0048266
22	4 28 56 9,3	11 51 8,2	0,84	0,46	0,0047348
23	4 29 54 2,9	11 30 52,8	0,85	0,37	0,0046408
24	5 0 51 57,9	11 10 26,5	0,86	0,26	0,0045450
25	5 1 49 54,4	10 49 49,8	0,86	0,13	0,0044473
26	5 2 47 52,2	10 29 2,5	0,87	0,01B	0,0043477
27	5 3 45 51,3	10 8 5,3	0,88	0,14	0,0042464
28	5 4 43 51,7	9 46 58,7	0,88	0,27	0,0041437
29	5 5 41 53,5	9 25 42,8	0,89	0,38	0,0040395
30	5 6 39 56,6	9 4 17,9	0,89	0,48	0,0039341
31	5 7 38 1,0	8 42 44,5	0,90	0,56	0,0038275

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		° ° ′ ″	° ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Sab.	7 20 54 39	7 27 32 15	1 38 15B	2 10 41B	6 51
2	Dom.	8 4 16 54	8 11 8 55	2 41 51	3 11 14	7 47
3	Lun.	8 18 8 26	8 25 15 26	3 38 17	4 2 26	8 44
4	Mart.	9 2 29 40	9 9 50 41	4 23 5	4 39 44	9 43
5	Merc.	9 17 17 45	9 24 49 56	4 51 53	4 59 6	10 44
6	Giov.	10 2 26 4	10 10 4 50	5 1 7	4 57 47	11 43
7	Ven.	10 17 44 49	10 25 24 35	4 49 4	4 35 10	12 42
8	Sab.	11 3 2 40	11 10 37 45	4 16 22	3 53 8	13 38
9	Dom.	11 18 8 35	11 25 34 10	3 26 1	2 55 40	14 32
10	Lun.	0 2 53 44	0 10 6 44	2 22 47	1 48 1	15 25
11	Mart.	0 17 12 48	0 24 11 52	1 12 5	0 35 37	16 18
12	Merc.	1 1 3 57	1 7 49 18	0 0 49A	0 36 38A	17 9
13	Giov.	1 14 28 15	1 21 1 13	1 11 25	1 44 44	18 1
14	Ven.	1 27 28 40	2 3 51 5	2 16 12	2 45 34	18 52
15	Sab.	2 10 9 0	2 16 22 53	3 12 32	3 36 55	19 42
16	Dom.	2 22 33 16	2 28 40 34	3 58 28	4 17 5	20 31
17	Lun.	3 4 45 16	3 10 47 45	4 32 39	4 45 2	21 19
18	Mart.	3 16 48 25	3 22 47 36	4 54 11	5 0 3	22 6
19	Merc.	3 28 45 36	4 4 42 43	5 2 37	5 1 52	22 51
20	Giov.	4 10 39 9	4 16 35 7	4 57 50	4 50 35	23 35
21	Ven.	4 22 30 50	4 28 26 27	4 40 10	4 26 43	* *
22	Sab.	5 4 22 10	5 10 18 10	4 10 21	3 51 14	0 18
23	Dom.	5 16 14 39	5 22 11 52	3 29 32	3 5 29	1 0
24	Lun.	5 28 10 4	6 4 9 33	2 39 16	2 11 10	1 43
25	Mart.	6 10 10 40	6 16 13 46	1 41 26	1 10 20	2 26
26	Merc.	6 22 19 15	6 28 27 33	0 38 12	0 5 20	3 10
27	Giov.	7 4 39 10	7 10 54 35	0 27 55B	1 1 12B	3 56
28	Ven.	7 17 14 19	7 23 38 50	1 34 8	2 6 18	4 45
29	Sab.	8 0 8 39	8 6 44 15	2 37 18	3 6 40	5 37
30	Dom.	8 13 26 4	8 20 14 26	3 33 57	3 58 40	6 31
31	Lun.	8 27 9 35	9 4 11 36	4 20 19	4 38 25	7 28

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	15 31	17 4A	57 12	57 40	31 14	31 29	1 54	11 43
2	16 30	18 47	58 8	58 37	31 44	32 0	3 0	12 31
3	17 32	19 21	59 6	59 33	32 16	32 31	4 1	13 27
4	18 35	18 35	59 59	60 23	32 45	32 58	4 58	14 31
5	19 40	16 25	60 43	61 0	33 9	33 18	5 49	15 44
6	20 44	13 0	61 12	61 19	33 25	33 29	6 32	17 1
7	21 46	8 36	61 22	61 20	33 30	33 29	7 13	18 19
8	22 46	3 39	61 13	61 1	33 25	33 19	7 49	19 38
9	23 45	1 26B	60 45	60 25	33 10	32 59	8 22	20 52
10	0 42	6 18	60 2	59 37	32 46	32 33	8 55	22 5
11	1 38	10 58	59 10	58 43	32 18	32 3	9 28	23 18
12	2 34	14 13	58 15	57 47	31 48	31 33	10 3	* *
13	3 30	16 54	57 20	56 54	31 18	31 4	10 41	0 24
14	4 25	18 35	56 29	56 6	30 50	30 38	11 22	1 28
15	5 19	19 16	55 45	55 26	30 26	30 16	12 8	2 25
16	6 13	18 57	55 8	54 53	30 6	29 58	12 57	3 17
17	7 5	17 43	54 39	54 27	29 50	29 44	13 49	4 4
18	7 55	15 40	54 18	54 9	29 39	29 34	14 46	4 45
19	8 45	12 56	54 3	53 58	29 30	29 28	15 44	5 21
20	9 32	9 40	53 55	53 53	29 26	29 25	16 41	5 52
21	* *	* *	53 52	53 53	29 24	29 25	17 40	6 21
22	10 19	5 29	53 56	53 59	29 27	29 28	18 39	6 48
23	11 6	2 3	54 4	54 11	29 31	29 35	19 38	7 13
24	11 52	1 59A	54 19	54 28	29 39	29 44	20 37	7 41
25	12 39	5 58	54 38	54 51	29 50	29 57	21 39	8 6
26	13 28	9 45	55 5	55 20	30 4	30 12	22 40	8 34
27	14 18	13 9	55 37	55 56	30 22	30 32	23 43	9 6
28	15 11	15 58	56 17	56 39	30 44	30 56	* *	9 42
29	16 7	18 1	57 3	57 27	31 9	31 22	0 46	10 25
30	17 5	19 3	57 53	58 19	31 36	31 50	1 46	11 15
31	18 6	18 55	58 46	59 12	32 5	32 19	2 44	12 13

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente $14^h\ 15'$ *Occidente*

1	.2.3.4 ○ .1
2	1. ○ .4.2.3
3	○ .1,2. .4 .3
4	2.1. ○ 3. .4
5	.2 ○ 3. 1. .4
6	3. .1 ○ .2 .4
7	.3 ○ 2.1. 4.
8	10 2☌3 ○ 4.
9	1.○2☌3 4.
10	○4. .1 2. .3
11	4. 2☌1 ○ 3.
12	4. .2 ○ 3☌1
13	4. 3. .1 ○ .2
14	4. 3. ○ 2.1.
15	.4 .3,2. .1○
16	30 .4 ○ ●1 20
17	.4 ○ .1 2. .3
18	.4,1.2. ○ 3.
19	.2 ○ .4.1,3.
20	3. .1 ○ .2 .4
21	3. ○ 2☌1 .4
22	.3,2. .1 ○ .4
23	.3.2○1. 4.
24	○.1 2. .3 4.
25	1.2. ○ 3. 4.
26	.2 ○ .1 4.3.
27	1. 3. ○ .2 ●4
28	3. 4. ○ 2☌1
29	4. .3 2. .1 ○
30	4. .3.2 ○ 1.
31	4. ○ 2☌3 10

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
5	Luna piena	1h 53′
12	Ultimo quarto	0 19
20	Luna nuova	4 11
27	Primo quarto	20 3
	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	44 ρ¹ ♒ 5.ª	9 52
1	55 e² ♒ 5.ª	18 24
2	9 β ♑ 3. 4.ª	9 34
3	13 ν ♒ 5.ª	5 15
7	71 ε ♓ 4.ª	6 39
10	61 δ¹ ♉ 4.ª	20 52
10	64 δ² ♉ 4. 5.ª	21 19
10	68 δ³ ♉ 5.ª	22 4
11	104 m ♉ 5.ª	16 49
14	51 □ 5.ª	3 40
14	54 λ □ 4. 5.ª	5 49
14	68 k □ 5.ª	13 26
16	65 α² ♋ 5.ª	7 51
19	91 ι ♌ 4. 5.ª	19 25
22	α ♍ Spica 1.ª	4 25
23	104 λ ♍ 4.ª	5 49
23	9 α² ♎ 3.ª	21 23
25	14 ν ♏ 4.ª	10 5
28	44 ρ¹ ♒ 5.ª	17 35
29	55 e² ♒ 5.ª	2 26
29	9 β ♑ 3. 4.ª	18 9
30	13 ν ♒ 5.ª	14 32

GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*		
	I. SATELLITE.		
	h	′	″
1	10	1	3 imm.
3	4	29	24
4	22	57	44
* 6	17	26	6
* 8	11	54	28
10	6	22	49
12	0	51	10
13	19	19	31
* 15	13	47	53
17	8	16	13
19	2	44	34
20	21	12	56
* 22	15	41	19
* 24	10	9	39
26	4	38	1
27	23	6	22
* 29	17	34	46
	II. SATELLITE.		
1	10	11	22 imm.
4	23	29	18
* 8	12	48	20
12	2	6	16
* 15	15	25	17
19	4	43	12
22	18	2	12
26	7	20	6
29	20	39	4
	III. SATELLITE.		
3	6	8	17 imm.
3	8	19	5 em.
10	10	7	35 imm.
* 10	12	19	4 em.
* 17	14	6	49 imm.
* 17	16	19	1 em.
24	18	6	40 imm.
24	20	19	36 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
244	1	Mart.	23 59 56,58	10 40 54,67	10 40 58,10	5 23	6 37
245	2	Merc.	23 59 37,71	10 44 32,30	10 44 54,65	5 25	6 35
246	3	Giov.	23 59 18,53	10 48 9,63	10 48 51,21	5 27	6 33
247	4	Ven.	23 58 59,08	10 51 46,68	10 52 47,76	5 29	6 31
248	5	Sab.	23 58 39,40	10 55 23,49	10 56 44,31	5 30	6 30
249	6	Dom.	23 58 19,49	10 59 0,05	11 0 40,86	5 31	6 29
250	7	Lun.	23 57 59,34	11 2 36,41	11 4 37,42	5 33	6 27
251	8	Mart.	23 57 38,99	11 6 12,58	11 8 33,98	5 35	6 25
252	9	Merc.	23 57 18,49	11 9 48,58	11 12 30,53	5 36	6 24
253	10	Giov.	23 56 57,87	11 13 24,45	11 16 27,08	5 38	6 22
254	11	Ven.	23 56 37,10	11 17 0,18	11 20 23,63	5 40	6 20
255	12	Sab.	23 56 16,25	11 20 35,82	11 24 20,18	5 42	6 18
256	13	Dom.	23 55 55,30	11 24 11,37	11 28 16,73	5 44	6 16
257	14	Lun.	23 55 34,31	11 27 46,87	11 32 13,28	5 45	6 15
258	15	Mart.	23 55 13,28	11 31 22,35	11 36 9,83	5 47	6 13
259	16	Merc.	23 54 52,23	11 34 57,77	11 40 6,38	5 48	6 12
260	17	Giov.	23 54 31,15	11 38 33,19	11 44 2,94	5 50	6 10
261	18	Ven.	23 54 10,08	11 42 8,62	11 47 59,50	5 51	6 9
262	19	Sab.	23 53 49,05	11 45 44,09	11 51 56,05	5 53	6 7
263	20	Dom.	23 53 28,08	11 49 19,61	11 55 52,60	5 55	6 5
264	21	Lun.	23 53 7,17	11 52 55,19	11 59 49,15	5 57	6 3
265	22	Mart.	23 52 46,33	11 56 30,84	12 3 45,70	5 58	6 2
266	23	Merc.	23 52 25,59	12 0 6,59	12 7 42,25	5 59	6 1
267	24	Giov.	23 52 4,95	12 3 42,45	12 11 38,80	6 1	5 59
268	25	Ven.	23 51 44,47	12 7 18,46	12 15 35,35	6 2	5 58
269	26	Sab.	23 51 24,12	12 10 54,61	12 19 31,90	6 3	5 57
270	27	Dom.	23 51 3,94	12 14 30,93	12 23 28,46	6 5	5 55
271	28	Lun.	23 50 43,93	12 18 7,42	12 27 25,01	6 6	5 54
272	29	Mart.	23 50 24,14	12 21 44,13	12 31 21,56	6 8	5 52
273	30	Merc.	23 50 4,58	12 25 21,06	12 35 18,11	6 9	5 51

Giorni del mese.	LONGITUDINE del Sole a mezzodì medio.	DECLINAZIONE boreale del Sole a mezzodì vero.	VARIAZ. della declin. in 1' nel merid.	LATIT. del Sole a mezzodì medio.	LOGARITMO della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	° ' "	° ' "	"	"	
1	5 8 36 6,9	8 21 2,7	- 0,91	0,61B	0,0037201
2	5 9 34 14,2	7 59 12,9	0,91	0,63	0,0036119
3	5 10 32 23,1	7 37 15,6	0,92	0,62	0,0035031
4	5 11 30 33,6	7 15 10,9	0,92	0,57	0,0033937
5	5 12 28 45,6	6 52 59,1	0,93	0,50	0,0032839
6	5 13 26 59,4	6 30 40,5	0,93	0,42	0,0031735
7	5 14 25 15,0	6 8 15,5	0,94	0,31	0,0030627
8	5 15 23 32,5	5 45 44,3	0,94	0,18	0,0029516
9	5 16 21 51,9	5 23 7,4	0,95	0,04	0,0028402
10	5 17 20 13,4	5 0 24,9	0,95	0,08A	0,0027283
11	5 18 18 37,0	4 37 37,2	0,96	0,20	0,0026159
12	5 19 17 2,7	4 14 44,5	0,96	0,31	0,0025029
13	5 20 15 30,6	3 51 47,2	0,96	0,40	0,0023894
14	5 21 14 0,6	3 28 45,7	0,97	0,45	0,0022749
15	5 22 12 32,8	3 5 40,2	0,97	0,48	0,0021596
16	5 23 11 7,3	2 42 31,2	0,97	0,49	0,0020434
17	5 24 9 43,9	2 19 18,9	0,97	0,46	0,0019261
18	5 25 8 22,5	1 56 3,8	0,97	0,39	0,0018076
19	5 26 7 3,3	1 32 46,1	0,98	0,30	0,0016882
20	5 27 5 46,2	1 9 26,2	0,98	0,19	0,0015676
21	5 28 4 31,0	0 46 4,5	0,98	0,07	0,0014458
22	5 29 3 17,7	0 22 41,3	0,98	0,07B	0,0013230
23	6 0 2 6,3	0 0 42,9 Aust.	0,98	0,20	0,0011991
24	6 1 0 56,8	0 24 7,8	0,98	0,33	0,0010742
25	6 1 59 49,1	0 47 33,2	0,98	0,46	0,0009485
26	6 2 58 43,2	1 10 58,6	0,98	0,56	0,0008222
27	6 3 57 39,0	1 34 23,5	0,98	0,64	0,0006954
28	6 4 56 36,5	1 57 47,7	0,98	0,69	0,0005681
29	6 5 55 35,8	2 21 10,9	0,98	0,72	0,0004407
30	6 6 54 36,8	2 44 32,8	0,97	0,71	0,0003133

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Mart.	9 11 20 25	9 18 35 46	4 52 29B	5 2 7B	8 26
2	Merc.	9 25 57 10	10 3 23 56	5 6 56	5 6 39	9 25
3	Giov.	10 10 55 12	10 18 29 52	5 1 6	4 50 15	10 23
4	Ven.	10 26 6 43	11 3 44 27	4 34 13	4 13 15	11 20
5	Sab.	11 11 21 43	11 18 57 8	3 47 47	3 18 21	12 16
6	Dom.	11 26 29 28	0 3 57 34	2 45 36	2 10 16	13 11
7	Lun.	0 11 20 27	0 18 37 21	1 33 5	0 54 50	14 5
8	Mart.	0 25 47 42	1 2 51 10	0 16 14	0 22 2A	14 59
9	Merc.	1 9 47 34	1 16 36 55	0 59 22A	1 35 15	15 52
10	Giov.	1 23 19 26	1 29 55 22	2 9 13	2 40 54	16 45
11	Ven.	2 6 25 8	2 12 49 12	3 10 0	3 36 16	17 37
12	Sab.	2 19 8 5	2 25 22 18	3 59 32	4 19 39	18 27
13	Dom.	3 1 32 25	3 7 38 58	4 36 31	4 50 4	19 16
14	Lun.	3 13 42 29	3 19 43 31	5 0 14	5 7 1	20 3
15	Mart.	3 25 42 33	4 1 40 4	5 10 25	5 10 25	20 48
16	Merc.	4 7 36 30	4 13 32 17	5 7 5	5 0 27	21 33
17	Giov.	4 19 27 45	4 25 23 14	4 50 37	4 37 38	22 16
18	Ven.	5 1 19 4	5 7 15 29	4 21 39	4 2 47	22 59
19	Sab.	5 13 12 45	5 19 11 5	3 41 13	3 17 8	23 41
20	Dom.	5 25 10 41	6 1 11 45	2 50 47	2 22 23	* *
21	Lun.	6 7 14 31	6 13 19 10	1 52 12	1 20 34	0 24
22	Mart.	6 19 25 55	6 25 34 58	0 47 48	0 14 13	1 9
23	Merc.	7 1 46 34	7 8 0 57	0 19 47B	0 53 50B	1 55
24	Giov.	7 14 18 24	7 20 39 12	1 27 31	2 0 28	2 43
25	Ven.	7 27 3 37	8 3 31 59	2 32 13	3 2 21	3 33
26	Sab.	8 10 4 36	8 16 41 46	3 30 26	3 56 4	4 26
27	Dom.	8 23 23 45	9 0 10 47	4 18 47	4 38 11	5 20
28	Lun.	9 7 3 0	9 14 0 31	4 53 52	5 5 28	6 16
29	Mart.	9 21 3 18	9 28 11 11	5 12 38	5 15 5	7 13
30	Merc.	10 5 23 55	10 12 41 3	5 12 38	5 5 9	8 9

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	19 9	17 29A	59 38	60 1	32 33	32 46	3 36	13 21
2	20 11	14 47	60 23	60 41	32 58	33 8	4 23	14 33
3	21 14	10 58	60 57	61 8	33 16	33 22	5 5	15 50
4	22 15	6 20	61 14	61 26	33 26	33 27	5 41	17 8
5	23 15	1 17	61 13	61 5	33 25	33 21	6 16	18 26
6	0 14	3 48B	60 53	60 36	33 14	33 5	6 52	19 40
7	1 12	8 31	60 16	59 52	32 54	32 41	7 26	20 55
8	2 10	12 34	59 26	58 58	32 27	32 11	8 1	22 6
9	3 7	15 43	58 29	58 0	31 56	31 40	8 38	23 13
10	4 4	17 51	57 31	57 3	31 24	31 9	9 19	* *
11	5 0	18 56	56 37	56 11	30 54	30 40	10 4	0 16
12	5 54	18 58	55 48	55 27	30 28	30 16	10 53	1 11
13	6 47	18 3	55 8	54 51	30 6	29 57	11 46	2 0
14	7 39	16 17	54 36	54 24	29 48	29 42	12 40	2 43
15	8 28	13 48	54 15	54 7	29 37	29 33	13 36	3 21
16	9 17	10 43	54 1	53 58	29 30	29 28	14 34	3 53
17	10 4	7 12	53 56	53 56	29 27	29 27	15 33	4 23
18	10 50	3 22	53 59	54 2	29 28	29 30	16 32	4 51
19	11 37	0 38A	54 7	54 14	29 33	29 36	17 30	5 17
20	* *	* *	54 21	54 30	29 40	29 44	18 30	5 44
21	12 24	4 39	54 39	54 50	29 50	29 56	19 32	6 11
22	13 13	8 31	55 1	55 14	30 2	30 9	20 34	6 39
23	14 3	12 3	55 27	55 41	30 16	30 24	21 36	7 10
24	14 55	15 3	55 56	56 12	30 32	30 41	22 39	7 45
25	15 49	17 19	56 29	56 47	30 50	31 0	23 39	8 24
26	16 46	18 40	57 6	57 26	31 10	31 21	* *	9 12
27	17 45	18 57	57 46	58 7	31 32	31 44	0 36	10 8
28	18 45	18 2	58 28	58 49	31 56	32 7	1 28	11 7
29	19 45	15 56	59 10	59 29	32 18	32 28	2 15	12 16
30	20 45	12 43	59 47	60 4	32 38	32 47	2 57	13 27

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente 13h 40′ *Occidente*

| | | |

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
4	Luna piena	10h 43′
11	Ultimo quarto	16 45
19	Luna nuova	20 20
27	Primo quarto	3 47

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
4	71 ε ♓ 4.ª	17 25
8	61 δ¹ ♉ 4.ª	5 53
8	64 δ² ♉ 4. 5.ª	6 21
8	68 δ³ ♉ 5.ª	7 4
9	104 m ♉ 5.ª	1 20
11	51 □ 5.ª	11 0
11	54 λ □ 4. 5.ª	13 7
11	68 k □ 5.ª	20 40
13	65 α² ♋ 5.ª	14 50
17	91 ι ♌ 4. 5.ª	2 22
20	100 λ ♍ 4.ª	12 4
21	9 α² ♎ 3.ª	3 24
22	14 ν ♏ 4.ª	15 39
22	7 χ Ofiuco 5.ª	21 45
25	44 ρ¹ ♐ 5.ª	23 21
26	55 e² ♐ 5.ª	8 42
27	9 β ♑ 3. 4.ª	0 27
27	13 ν ♒ 5.ª	21 25

GIORNI.	ECLISSI DE' SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*		
	I. SATELLITE.		
	h	′	″
* 1	12	3	7 imm.
3	6	31	29
5	0	59	51
6	19	28	16
* 8	13	56	38
* 10	8	25	1
12	2	53	24
13	21	21	50
* 15	15	50	12
* 17	10	18	37
19	4	47	1
20	23	15	28
* 22	17	43	52
* 24	12	12	19
26	6	40	44
28	1	9	13
29	19	37	38
* 31	14	6	6
	II. SATELLITE.		
* 3	9	57	0 imm.
6	23	15	54
* 10	12	33	48
14	1	52	41
* 17	15	10	36
21	4	29	26
24	17	47	22
* 28	7	6	9
* 31	20	24	4
	III. SATELLITE.		
1	22	5	57 imm.
2	0	19	38 em.
9	2	5	17 imm.
9	4	19	43 em.
16	6	4	17 imm.
* 16	8	19	31 em.
* 23	10	3	20 imm.
* 23	12	19	22 em.
* 30	14	2	52 imm.
* 30	16	19	41 em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
274	1	Giov.	23 49 45,27	12 28 58,25	12 39 14,66	6 11	5 49
275	2	Ven.	23 49 26,25	12 32 35,72	12 43 11,21	6 13	5 47
276	3	Sab.	23 49 7,51	12 36 13,49	12 47 7,77	6 15	5 45
277	4	Dom.	23 48 49,09	12 39 51,57	12 51 4,52	6 16	5 44
278	5	Lun.	23 48 31,00	12 43 29,99	12 55 0,87	6 17	5 43
279	6	Mart.	23 48 13,29	12 47 8,78	12 58 57,42	6 18	5 42
280	7	Merc.	23 47 55,98	12 50 47,96	13 2 53,97	6 20	5 40
281	8	Giov.	23 47 39,05	12 54 27,55	13 6 50,53	6 21	5 39
282	9	Ven.	23 47 22,59	12 58 7,59	13 10 47,08	6 23	5 37
283	10	Sab.	23 47 6,57	13 1 48,08	13 14 43,63	6 24	5 36
284	11	Dom.	23 46 51,04	13 5 29,06	13 18 40,18	6 25	5 34
285	12	Lun.	23 46 36,01	13 9 10,54	13 22 36,73	6 27	5 33
286	13	Mart.	23 46 21,50	13 12 52,54	13 26 33,28	6 28	5 32
287	14	Merc.	23 46 7,54	13 16 35,09	13 30 29,83	6 30	5 30
288	15	Giov.	23 45 54,13	13 20 18,20	13 34 26,38	6 31	5 29
289	16	Ven.	23 45 41,31	13 24 1,89	13 38 22,93	6 33	5 27
290	17	Sab.	23 45 29,05	13 27 46,16	13 42 19,49	6 35	5 25
291	18	Dom.	23 45 17,38	13 31 31,02	13 46 16,05	6 37	5 23
292	19	Lun.	23 45 6,35	13 35 16,51	13 50 12,60	6 38	5 22
293	20	Mart.	23 44 55,97	13 39 2,64	13 54 9,15	6 40	5 20
294	21	Merc.	23 44 46,19	13 42 49,40	13 58 5,71	6 42	5 18
295	22	Giov.	23 44 37,07	13 46 36,81	14 2 2,27	6 43	5 17
296	23	Ven.	23 44 28,64	13 50 24,91	14 5 58,82	6 45	5 15
297	24	Sab.	23 44 20,88	13 54 13,68	14 9 55,37	6 47	5 13
298	25	Dom.	23 44 13,81	13 58 3,14	14 13 51,92	6 48	5 12
299	26	Lun.	23 44 7,44	14 1 53,30	14 17 48,47	6 49	5 11
300	27	Mart.	23 44 1,78	14 5 44,18	14 21 45,02	6 51	5 9
301	28	Merc.	23 43 56,84	14 9 35,78	14 25 41,58	6 52	5 8
302	29	Giov.	23 43 52,64	14 13 28,12	14 29 38,13	6 54	5 6
303	30	Ven.	23 43 49,19	14 17 21,21	14 33 34,68	6 56	5 4
304	31	Sab.	23 43 46,51	14 21 15,08	14 37 31,24	6 57	5 3

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	6 7 53 39,6	3 7 52,8	0,97	0,68B	0,0001860
2	6 8 52 44,2	3 31 10,7	0,97	0,61	0,0000589
3	6 9 51 50,7	3 54 26,3	0,97	0,52	9,9999323
4	6 10 50 59,2	4 17 39,0	0,96	0,42	9,9998060
5	6 11 50 9,6	4 40 48,8	0,96	0,29	9,9996804
6	6 12 49 22,0	5 3 54,9	0,96	0,15	9,9995554
7	6 13 48 36,6	5 26 57,4	0,96	0,01	9,9994311
8	6 14 47 53,3	5 49 56,7	0,95	0,11A	9,9993074
9	6 15 47 12,2	6 12 49,6	0,95	0,22	9,9991843
10	6 16 46 33,4	6 35 38,6	0,95	0,31	9,9990619
11	6 17 45 56,9	6 58 22,4	0,94	0,37	9,9989399
12	6 18 45 22,7	7 21 0,8	0,94	0,41	9,9988183
13	6 19 44 50,8	7 43 33,2	0,94	0,42	9,9986971
14	6 20 44 21,3	8 5 59,4	0,93	0,39	9,9985761
15	6 21 43 54,2	8 28 19,0	0,93	0,33	9,9984553
16	6 22 43 29,4	8 50 31,4	0,93	0,25	9,9983346
17	6 23 43 6,6	9 12 36,1	0,92	0,15	9,9982139
18	6 24 42 46,1	9 34 33,2	0,92	0,03	9,9980932
19	6 25 42 27,7	9 56 22,1	0,91	0,10B	9,9979723
20	6 26 42 11,4	10 18 2,2	0,91	0,24	9,9978513
21	6 27 41 57,1	10 39 33,0	0,90	0,37	9,9977304
22	6 28 41 44,6	11 0 54,4	0,89	0,48	9,9976095
23	6 29 41 34,1	11 22 5,7	0,89	0,59	9,9974887
24	7 0 41 25,3	11 43 6,8	0,88	0,68	9,9973682
25	7 1 41 18,2	12 3 57,4	0,87	0,73	9,9972480
26	7 2 41 12,9	12 24 36,6	0,86	0,75	9,9971284
27	7 3 41 9,2	12 45 4,2	0,85	0,75	9,9970093
28	7 4 41 7,1	13 5 19,8	0,84	0,72	9,9968911
29	7 5 41 6,6	13 25 23,0	0,83	0,67	9,9967738
30	7 6 41 7,8	13 45 13,4	0,82	0,58	9,9966576
31	7 7 41 10,5	14 4 50,5	0,81	0,47	9,9965428

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		s ° ′ ″	s ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Giov.	10 20 2 2	10 27 26 9	4 52 37B	4 35 8B	9 4
2	Ven.	11 4 52 35	11 12 20 23	4 12 55	3 46 20	9 59
3	Sab.	11 19 48 33	11 27 16 2	3 15 50	2 42 2	10 54
4	Dom.	0 4 41 47	0 12 4 48	2 5 34	1 27 12	11 49
5	Lun.	0 19 24 10	0 26 39 2	0 47 40	0 7 45	12 43
6	Mart.	1 3 48 45	1 10 52 43	0 31 50A	1 10 26A	13 38
7	Merc.	1 17 50 37	1 24 42 11	1 47 25	2 22 18	14 32
8	Giov.	2 1 27 21	2 8 6 11	2 54 39	3 24 6	15 26
9	Ven.	2 14 38 53	2 21 5 45	3 50 25	4 13 24	16 19
10	Sab.	2 27 27 7	3 3 43 28	4 32 55	4 48 53	17 9
11	Dom.	3 9 55 16	3 16 3 4	5 1 16	5 10 5	17 58
12	Lun.	3 22 7 25	3 28 8 52	5 15 19	5 17 3	18 44
13	Mart.	4 4 8 1	4 10 5 25	5 15 19	5 10 11	19 29
14	Merc.	4 16 1 38	4 21 57 11	5 1 46	4 50 8	20 13
15	Giov.	4 27 52 36	5 3 48 22	4 35 24	4 17 42	20 56
16	Ven.	5 9 44 55	5 15 42 41	3 57 12	3 34 3	21 38
17	Sab.	5 21 42 2	5 27 43 19	3 8 26	2 40 36	22 21
18	Dom.	6 3 46 49	6 9 52 48	2 10 47	1 39 15	23 5
19	Lun.	6 16 1 31	6 22 13 7	1 6 21	0 32 23	23 51
20	Mart.	6 28 27 45	7 4 45 33	0 2 15B	0 37 8B	* *
21	Merc.	7 11 6 34	7 17 30 53	1 11 52	1 45 59	0 39
22	Giov.	7 23 58 32	8 0 29 31	2 19 2	2 50 34	1 30
23	Ven.	8 7 3 51	8 13 41 32	3 20 6	3 47 12	2 22
24	Sab.	8 20 22 33	8 27 6 55	4 11 27	4 32 25	3 17
25	Dom.	9 3 54 37	9 10 45 35	4 49 44	5 3 5	4 12
26	Lun.	9 17 39 48	9 24 37 10	5 12 10	5 16 47	5 7
27	Mart.	10 1 37 34	10 8 40 49	5 16 43	5 11 55	6 2
28	Merc.	10 15 46 45	10 22 55 5	5 2 20	4 48 3	6 56
29	Giov.	11 0 5 28	11 7 17 33	4 29 11	4 6 2	7 49
30	Ven.	11 14 30 52	11 21 44 55	3 38 54	3 8 13	8 42
31	Sab.	11 28 59 8	0 6 12 56	2 34 31	1 58 22	9 35

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo dì medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo dì medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	21 45	8 36A	60 18	60 29	32 55	33 1	3 36	14 41
2	22 44	3 51	60 37	60 41	33 6	33 8	4 11	15 58
3	23 43	1 10B	60 41	60 37	33 8	33 6	4 45	17 13
4	0 42	6 5	60 29	60 18	33 1	32 54	5 20	18 28
5	1 40	10 31	60 2	59 43	32 46	32 36	5 55	19 42
6	2 39	14 12	59 21	58 57	32 24	32 11	6 32	20 54
7	3 38	16 53	58 32	58 5	31 57	31 43	7 12	21 59
8	4 35	18 28	57 37	57 10	31 27	31 12	7 57	22 59
9	5 32	18 58	56 44	56 18	30 58	30 44	8 46	23 52
10	6 27	18 24	55 55	55 33	30 31	30 20	9 37	* *
11	7 19	16 56	55 13	54 55	30 9	29 59	10 31	0 38
12	8 10	14 41	54 41	54 29	29 51	29 45	11 28	1 20
13	8 59	11 49	54 19	54 12	29 39	29 35	12 26	1 53
14	9 47	8 28	54 7	54 4	29 33	29 31	13 24	2 24
15	10 33	9 44	54 4	54 6	29 31	29 32	14 24	2 53
16	11 20	0 48	54 10	54 16	29 35	29 38	15 22	3 20
17	12 7	3 14A	54 24	54 34	29 42	29 47	16 20	3 46
18	12 55	7 11	54 44	54 56	29 53	30 0	17 22	4 14
19	13 45	10 53	55 9	55 23	30 7	30 14	18 26	4 40
20	* *	* *	55 37	55 51	30 22	30 30	19 28	5 10
21	14 38	14 7	56 6	56 20	30 38	30 46	20 32	5 45
22	15 32	16 40	56 35	56 49	30 53	31 1	21 33	6 24
23	16 29	18 20	57 4	57 18	31 9	31 17	22 32	7 8
24	17 27	18 57	57 32	57 47	31 25	31 33	23 26	8 1
25	18 26	18 24	58 1	58 15	31 40	31 48	* *	9 1
26	19 26	16 41	58 28	58 42	31 55	32 3	0 13	10 6
27	20 25	13 54	58 55	59 7	32 10	32 16	0 55	11 15
28	21 23	10 11	59 18	59 27	32 22	32 27	1 34	12 25
29	22 20	5 49	59 35	59 42	32 32	32 36	2 8	13 39
30	23 17	1 2	59 46	59 48	32 38	32 39	2 41	14 53
31	0 14	3 49B	59 48	59 45	32 39	32 37	3 16	16 4

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente 13h 0′ *Occidente*

| | | |

GIORNI.	FASI DELLA LUNA in tempo medio.	
2	Luna piena	21h 48′
10	Ultimo quarto	12 21
18	Luna nuova	11 37
25	Primo quarto	11 8

	CONGIUNZIONE DELLA LUNA COLLE STELLE in tempo medio.	
1	71 ε ♓ 4.ª	3 15
4	61 δ ♉ 4.ª	15 50
4	64 δ² ♉ 4. 5.ª	16 19
4	68 δ³ ♉ 5.ª	17 1
5	104 m ♉ 5.ª	10 58
7	51 □ 5.ª	19 35
7	54 λ □ 4. 5.ª	21 41
8	68 k □ 5.ª	5 7
9	65 α² ♋ 5.ª	22 44
13	91 ι ♌ 4. 5.ª	10 22
16	100 λ ♍ 4.ª	19 59
17	9 α² ♎ 3.ª	11 10
17	♀	22 17
18	14 ν ♍ 4.ª	22 48
19	7 χ Ofiuco 5.ª	4 45
22	44 ρ¹ ♐ 5.ª	4 58
22	55 e² ♐ 5.ª	13 50
23	9 β ♑ 3. 4.ª	5 50
24	13 ν ♒ 5.ª	2 46
28	71 ε ♓ 4.ª	10 46

GIORNI.	ECLISSI DE'SATELL. DI GIOVE *Tempo medio.*	
	I. SATELLITE.	
* 2	8h 34′ 32″	imm.
4	3 3 3	
5	21 51 31	
* 7	16 0 1	
* 9	10 28 29	
11	4 57 2	
12	23 25 31	
* 14	17 54 3	
* 16	12 22 33	
* 18	6 51 8	
20	1 19 39	
21	19 48 14	
* 23	14 16 46	
* 25	8 45 24	
27	3 13 57	
28	21 42 34	
* 30	16 11 8	
	II. SATELLITE.	
* 4	9 42 49	imm.
7	23 0 45	
* 11	12 19 26	
15	1 37 23	
* 18	14 56 1	
22	4 14 0	
* 25	17 32 34	
* 29	6 50 34	
	III. SATELLITE.	
* 6	18 2 26	imm.
6	20 20 5	em.
13	22 2 45	imm.
14	0 21 15	em.
21	2 2 31	imm.
21	4 21 54	em.
* 28	6 2 26	imm.
* 28	8 22 40	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
305	1	Dom.	23 43 44,59	14 25 9,71	14 41 27,79	6 58	5 2
306	2	Lun.	23 43 43,45	14 29 5,13	14 45 24,35	7 0	5 0
307	3	Mart.	23 43 43,12	14 33 1,35	14 49 20,90	7 1	4 59
308	4	Merc.	23 43 43,63	14 36 58,41	14 53 17,45	7 2	4 58
309	5	Giov.	23 43 44,96	14 40 56,29	14 57 14,00	7 4	4 56
310	6	Ven.	23 43 47,07	14 44 54,97	15 1 10,56	7 5	4 55
311	7	Sab.	23 43 50,04	14 48 54,50	15 5 7,12	7 6	4 54
312	8	Dom.	23 43 53,88	14 52 54,91	15 9 3,67	7 8	4 52
313	9	Lun.	23 43 58,59	14 56 56,19	15 13 0,23	7 9	4 51
314	10	Mart.	23 44 4,17	15 0 58,33	15 16 56,78	7 10	4 50
315	11	Merc.	23 44 10,57	15 5 1,31	15 20 53,34	7 12	4 48
316	12	Giov.	23 44 17,86	15 9 5,17	15 24 49,89	7 13	4 47
317	13	Ven.	23 44 26,02	15 13 9,91	15 28 46,45	7 14	4 46
318	14	Sab.	23 44 35,05	15 17 15,52	15 32 43,00	7 15	4 45
319	15	Dom.	23 44 44,95	15 21 22,00	15 36 39,56	7 16	4 44
320	16	Lun.	23 44 55,72	15 25 29,35	15 40 36,11	7 17	4 43
321	17	Mart.	23 45 7,30	15 29 37,53	15 44 32,67	7 19	4 41
322	18	Merc.	23 45 19,75	15 33 46,56	15 48 29,22	7 20	4 40
323	19	Giov.	23 45 33,01	15 37 56,42	15 52 25,78	7 21	4 39
324	20	Ven.	23 45 47,11	15 42 7,11	15 56 22,33	7 22	4 38
325	21	Sab.	23 46 2,01	15 46 18,61	16 0 18,89	7 23	4 37
326	22	Dom.	23 46 17,72	15 50 30,91	16 4 15,44	7 24	4 36
327	23	Lun.	23 46 34,18	15 54 43,97	16 8 12,00	7 25	4 35
328	24	Mart.	23 46 51,43	15 58 57,82	16 12 8,55	7 26	4 34
329	25	Merc.	23 47 9,40	16 3 12,40	16 16 5,11	7 27	4 33
330	26	Giov.	23 47 28,13	16 7 27,73	16 20 1,66	7 28	4 32
331	27	Ven.	23 47 47,57	16 11 43,77	16 23 58,21	7 29	4 31
332	28	Sab.	23 48 7,69	16 16 0,51	16 27 54,77	7 30	4 30
333	29	Dom.	23 48 28,51	16 20 17,95	16 31 51,33	7 31	4 29
334	30	Lun.	23 48 50,00	16 24 36,06	16 35 47,89	7 32	4 28

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1′ nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	° ° ′ ″	° ′ ″	″	″	
1	7 8 41 14,9	14 24 14,0	0,80	0,34B	9,9964295
2	7 9 41 21,0	14 43 23,7	0,79	0,21	9,9963177
3	7 10 41 29,0	15 2 19,1	0,78	0,08	9,9962075
4	7 11 41 38,7	15 20 59,6	0,77	0,05A	9,9960989
5	7 12 41 50,2	15 39 25,1	0,76	0,17	9,9959922
6	7 13 42 3,4	15 57 35,0	0,75	0,26	9,9958871
7	7 14 42 18,5	16 15 28,9	0,74	0,33	9,9957837
8	7 15 42 35,7	16 33 6,7	0,73	0,38	9,9956819
9	7 16 42 54,8	16 50 27,8	0,71	0,39	9,9955819
10	7 17 43 16,0	17 7 31,7	0,70	0,38	9,9954834
11	7 18 43 39,1	17 24 18,1	0,69	0,33	9,9953864
12	7 19 44 4,1	17 40 46,6	0,68	0,25	9,9952908
13	7 20 44 31,0	17 56 56,8	0,67	0,16	9,9951965
14	7 21 44 59,7	18 12 48,3	0,65	0,05	9,9951033
15	7 22 45 30,3	18 28 20,6	0,64	0,08B	9,9950110
16	7 23 46 2,8	18 43 33,4	0,63	0,22	9,9949198
17	7 24 46 36,8	18 58 26,4	0,62	0,38	9,9948296
18	7 25 47 12,5	19 12 59,0	0,60	0,47	9,9947404
19	7 26 47 49,7	19 27 10,8	0,59	0,58	9,9946521
20	7 27 48 28,3	19 41 1,4	0,57	0,67	9,9945648
21	7 28 49 8,3	19 54 30,5	0,56	0,73	9,9944787
22	7 29 49 49,5	20 7 37,9	0,54	0,76	9,9943938
23	8 0 50 31,8	20 20 23,1	0,53	0,75	9,9943100
24	8 1 51 15,3	20 32 45,5	0,51	0,73	9,9942276
25	8 2 52 0,0	20 44 45,0	0,50	0,68	9,9941467
26	8 3 52 45,5	20 56 21,3	0,48	0,60	9,9940675
27	8 4 53 31,9	21 7 34,0	0,46	0,49	9,9939902
28	8 5 54 19,4	21 18 22,7	0,44	0,38	9,9939147
29	8 6 55 7,9	21 28 47,2	0,42	0,25	9,9938413
30	8 7 55 57,3	21 38 47,2	0,41	0,11	9,9937704

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Dom.	0 13 25 41	0 20 36 43	1 20 25B	0 41 20B	10 28
2	Lun.	0 27 45 24	1 4 51 7	0 1 50	0 37 25A	11 23
3	Mart.	1 11 53 17	1 18 51 21	1 15 45A	1 52 33	12 17
4	Merc.	1 25 44 54	2 2 33 35	2 27 17	2 59 28	13 12
5	Giov.	2 9 17 7	2 15 55 22	3 28 44	3 54 46	14 6
6	Ven.	2 22 28 18	2 28 56 0	4 17 20	4 36 17	14 59
7	Sab.	3 5 18 36	3 11 36 22	4 51 33	5 3 4	15 49
8	Dom.	3 17 49 37	3 23 58 47	5 10 52	5 14 59	16 37
9	Lun.	4 0 4 17	4 6 6 40	5 15 29	5 12 30	17 24
10	Mart.	4 12 6 27	4 18 4 14	5 6 6	4 56 26	18 8
11	Merc.	4 24 0 35	4 29 56 10	4 43 37	4 27 48	18 51
12	Giov.	5 5 51 32	5 11 47 20	4 9 9	3 47 48	19 33
13	Ven.	5 17 44 9	5 23 42 34	3 23 56	2 57 46	20 16
14	Sab.	5 29 43 7	6 5 46 19	2 29 29	1 59 19	20 59
15	Dom.	6 11 52 39	6 18 2 29	1 27 33	0 54 30	21 44
16	Lun.	6 24 16 11	7 0 34 3	0 20 28	0 14 10B	22 32
17	Mart.	7 6 56 16	7 13 22 57	0 48 59B	1 23 33	23 22
18	Merc.	7 19 54 8	7 26 29 46	1 57 24	2 30 2	* *
19	Giov.	8 3 9 43	8 9 53 46	3 0 56	3 29 37	0 15
20	Ven.	8 16 41 39	8 23 33 1	3 55 35	4 18 22	1 10
21	Sab.	9 0 27 29	9 7 24 38	4 37 33	4 52 45	2 6
22	Dom.	9 14 24 3	9 21 25 19	5 3 41	5 10 7	3 3
23	Lun.	9 28 28 3	10 5 31 49	5 11 53	5 8 57	3 58
24	Mart.	10 12 36 18	10 19 41 9	5 1 19	4 49 4	4 53
25	Merc.	10 26 46 6	11 3 50 54	4 32 25	4 11 37	5 46
26	Giov.	11 10 55 19	11 17 59 9	3 47 0	3 18 57	6 38
27	Ven.	11 25 2 15	0 2 4 25	2 47 55	2 14 25	7 29
28	Sab.	0 9 5 29	0 16 5 15	1 38 59	1 2 10	8 20
29	Dom.	0 23 3 31	1 0 0 3	0 24 36	0 13 10A	9 12
30	Lun.	1 6 54 36	1 13 46 52	0 50 31A	1 26 53	10 5

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo di medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo di medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	1 11	8 25B	59 39	59 30	32 34	32 29	3 49	17 18
2	2 10	12 28	59 19	59 4	32 23	32 15	4 26	18 30
3	3 8	15 40	58 48	58 30	32 6	31 56	5 4	19 38
4	4 7	17 50	58 9	57 47	31 45	31 33	5 47	20 42
5	5 5	18 52	57 24	57 1	31 20	31 8	6 34	21 40
6	6 2	18 47	56 38	56 15	30 55	30 43	7 26	22 31
7	6 57	17 41	55 53	55 33	30 31	30 20	8 20	23 15
8	7 49	15 44	55 15	54 59	30 10	30 1	9 17	23 52
9	8 39	13 5	54 44	54 32	29 53	29 46	10 16	* *
10	9 28	9 53	54 23	54 16	29 41	29 37	11 14	0 25
11	10 15	6 18	54 12	54 11	29 35	29 34	12 12	0 54
12	11 1	2 26	54 12	54 15	29 35	29 37	13 10	1 22
13	11 48	1 34A	54 21	54 29	29 40	29 45	14 8	1 47
14	12 35	5 34	54 39	54 52	29 50	29 57	15 8	2 16
15	13 25	9 24	55 6	55 22	30 5	30 14	16 11	2 42
16	14 16	12 53	55 39	55 56	30 23	30 32	17 15	3 10
17	15 10	15 47	56 14	56 33	30 42	30 52	18 19	3 43
18	* *	* *	56 51	57 9	31 2	31 12	19 23	4 20
19	16 7	17 52	57 25	57 41	31 21	31 29	20 24	5 4
20	17 7	18 54	57 56	58 10	31 37	31 45	21 20	5 55
21	18 7	18 46	58 22	58 33	31 52	31 58	22 12	6 53
22	19 8	17 25	58 42	58 50	32 3	32 7	22 56	7 57
23	20 7	14 55	58 57	59 2	32 11	32 14	23 36	9 5
24	21 6	11 28	59 6	59 9	32 16	32 17	* *	10 17
25	22 3	7 19	59 10	59 11	32 18	32 19	0 12	11 28
26	22 59	2 43	59 10	59 8	32 18	32 17	0 44	12 41
27	23 54	2 1B	59 5	59 1	32 15	32 13	1 17	13 51
28	0 40	6 38	58 56	58 49	32 10	32 7	1 48	15 2
29	1 46	10 50	58 41	58 32	32 2	31 57	2 21	16 12
30	2 43	14 22	58 21	58 9	31 51	31 45	2 58	17 20

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente 12h 17′ *Occidente*

| | | |

Giorni.	Fasi della Luna in tempo medio.	
2	Luna piena	11h 23′
10	Ultimo quarto	9 53
18	Luna nuova	1 19
24	Primo quarto	19 13

	Congiunzione della Luna colle Stelle in tempo medio.	
2	61 δ¹ ♉ 4.ª	1 15
2	64 δ² ♉ 4. 5.ª	1 32
2	68 δ³ ♉ 5.ª	2 17
2	104 m ♉ 5.ª	20 20
5	51 □ 5.ª	4 34
5	54 λ □ 4. 5.ª	6 38
5	68 k □ 5.ª	13 56
7	65 α² ♋ 5.ª	7 11
10	91 ι ♌ 4. 5.ª	18 44
14	100 λ ♍ 4.ª	5 12
14	9 α² ♎ 3.ª	20 28
16	14 ν ♏ 4.ª	7 59
16	7 χ Ofiuco 5.ª	13 54
17	☿	2 38
19	44 ρ¹ ♐ 5.ª	12 33
19	55 e² ♐ 5.ª	21 13
20	9 β ♑ 3. 4.ª	12 43
21	13 γ ♒ 5.ª	9 7
25	71 ε ♓ 4.ª	16 21
29	61 δ¹ ♉ 4.ª	8 21
29	64 δ² ♉ 3. 4.ª	8 50
29	68 δ³ ♉ 5.ª	9 34
30	104 m ♉ 5.ª	3 55

Giorni.	Eclissi de' Satell. di Giove Tempo medio.			
	I. Satellite.			
	h	′	″	
* 2	10	39	49	imm.
* 4	7	17	30	em.
6	1	46	11	
7	20	14	50	
* 9	14	43	34	
* 11	9	12	14	
13	3	40	58	
14	22	9	39	
* 16	16	38	26	
* 18	11	7	8	
* 20	5	35	55	
22	0	4	37	
23	18	33	27	
* 25	13	2	11	
* 27	7	31	0	
29	1	59	44	
30	20	28	36	
	II. Satellite.			
2	20	9	5	imm.
* 6	12	3	35	em.
10	1	22	8	
* 13	14	40	13	
17	3	58	42	
* 20	17	16	48	
* 24	6	35	13	
27	19	53	19	
* 31	9	11	41	
	III. Satellite.			
* 5	10	2	8	imm.
* 5	12	23	14	em.
* 12	14	1	59	imm.
* 12	16	24	0	em.
19	18	2	23	imm.
19	20	25	19	em.
26	22	2	51	imm.
27	0	26	41	em.

Giorni dell'anno.	Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Tempo medio a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì vero.	Tempo sidereo a mezzodì medio.	Nascere del Sole a tempo vero.	Tramontare del Sole a tempo vero.
			h ′ ″	h ′ ″	h ′ ″	h ′	h ′
335	1	Mart.	23 49 12,14	16 28 54,82	16 39 44,45	7 33	4 27
336	2	Merc.	23 49 34,92	16 33 14,22	16 43 41,01	7 33	4 27
337	3	Giov.	23 49 58,33	16 37 34,25	16 47 37,57	7 34	4 26
338	4	Ven.	23 50 22,32	16 41 54,87	16 51 34,13	7 35	4 25
339	5	Sab.	23 50 46,87	16 46 16,05	16 55 30,69	7 36	4 24
340	6	Dom.	23 51 12,00	16 50 37,80	16 59 27,24	7 36	4 24
341	7	Lun.	23 51 37,69	16 55 0,10	17 3 23,79	7 37	4 23
342	8	Mart.	23 52 3,88	16 59 22,92	17 7 20,35	7 37	4 23
343	9	Merc.	23 52 30,54	17 3 46,22	17 11 16,91	7 38	4 22
344	10	Giov.	23 52 57,68	17 8 9,99	17 15 13,47	7 38	4 22
345	11	Ven.	23 53 25,25	17 12 34,19	17 19 10,02	7 39	4 21
346	12	Sab.	23 53 53,21	17 16 58,79	17 23 6,58	7 39	4 21
347	13	Dom.	23 54 21,56	17 21 23,77	17 27 3,14	7 40	4 20
348	14	Lun.	23 54 50,24	17 25 49,09	17 30 59,70	7 40	4 20
349	15	Mart.	23 55 19,22	17 30 14,72	17 34 56,26	7 40	4 20
350	16	Merc.	23 55 48,47	17 34 40,60	17 38 52,81	7 41	4 19
351	17	Giov.	23 56 17,98	17 39 6,73	17 42 49,36	7 41	4 19
352	18	Ven.	23 56 47,66	17 43 33,05	17 46 45,92	7 41	4 19
353	19	Sab.	23 57 17,47	17 47 59,50	17 50 42,48	7 42	4 18
354	20	Dom.	23 57 47,43	17 52 26,09	17 54 39,03	7 42	4 18
355	21	Lun.	23 58 17,46	17 56 52,77	17 58 35,59	7 42	4 18
356	22	Mart.	23 58 47,53	18 1 19,45	18 2 32,15	7 42	4 18
357	23	Merc.	23 59 17,60	18 5 46,19	18 6 28,71	7 42	4 18
358	24	Giov.	23 59 47,63	18 10 12,87	18 10 25,27	7 42	4 18
359	25	Ven.	0 0 17,57	18 14 39,45	18 14 21,83	7 41	4 19
360	26	Sab.	0 0 47,42	18 19 5,93	18 18 18,38	7 41	4 19
361	27	Dom.	0 1 17,13	18 23 32,27	18 22 14,93	7 41	4 19
362	28	Lun.	0 1 46,67	18 27 58,45	18 26 11,49	7 40	4 20
363	29	Mart.	0 2 16,00	18 32 24,42	18 30 8,05	7 40	4 20
364	30	Merc.	0 2 45,10	18 36 50,16	18 34 4,61	7 39	4 21
365	31	Giov.	0 3 13,93	18 41 15,63	18 38 1,17	7 39	4 21

Giorni del mese.	Longitudine del Sole a mezzodì medio.	Declinazione australe del Sole a mezzodì vero.	Variaz. della declin. in 1' nel merid.	Latit. del Sole a mezzodì medio.	Logaritmo della distan. della Terra dal Sole a mezzodì medio.
	° ' "	° ' "	"	"	
1	8 8 56 47,6	21 48 22,2	+ 0,39	0,02A	9,9937019
2	8 9 57 39,0	21 57 32,1	0,37	0,14	9,9936358
3	8 10 58 31,4	22 6 16,9	0,36	0,24	9,9935721
4	8 11 59 24,8	22 14 36,0	0,34	0,33	9,9935108
5	8 13 0 19,1	22 22 29,2	0,32	0,37	9,9934523
6	8 14 1 14,6	22 29 56,2	0,30	0,39	9,9933963
7	8 15 2 11,3	22 36 57,0	0,28	0,39	9,9933428
8	8 16 3 9,1	22 43 31,2	0,27	0,35	9,9932917
9	8 17 4 8,0	22 49 38,5	0,25	0,28	9,9932430
10	8 18 5 7,9	22 55 18,8	0,23	0,19	9,9931966
11	8 19 6 9,0	23 0 31,9	0,21	0,08	9,9931523
12	8 20 7 11,3	23 5 17,8	0,19	0,05B	9,9931102
13	8 21 8 14,6	23 9 36,1	0,17	0,18	9,9930700
14	8 22 9 18,7	23 13 26,9	0,15	0,31	9,9930317
15	8 23 10 23,8	23 16 49,8	0,13	0,43	9,9929950
16	8 24 11 29,7	23 19 44,7	0,11	0,54	9,9929599
17	8 25 12 36,3	23 22 11,7	0,09	0,64	9,9929264
18	8 26 13 43,5	23 24 10,6	0,07	0,71	9,9928945
19	8 27 14 51,2	23 25 41,2	0,05	0,74	9,9928643
20	8 28 15 59,4	23 26 43,5	0,03	0,75	9,9928357
21	8 29 17 7,9	23 27 17,5	0,01	0,74	9,9928088
22	9 0 18 16,6	23 27 23,3	+ 0,01	0,69	9,9927836
23	9 1 19 25,4	23 27 0,7	0,02	0,61	9,9927602
24	9 2 20 34,4	23 26 9,8	0,04	0,50	9,9927388
25	9 3 21 43,3	23 24 50,6	0,06	0,38	9,9927195
26	9 4 22 52,2	23 23 3,1	0,08	0,26	9,9927023
27	9 5 24 1,0	23 20 47,3	0,10	0,12	9,9926874
28	9 6 25 9,8	23 18 3,5	0,12	0,01A	9,9926749
29	9 7 26 18,5	23 14 51,6	0,14	0,13	9,9926651
30	9 8 27 27,1	23 11 11,8	0,16	0,23	9,9926581
31	9 9 28 35,4	23 7 4,3	0,18	0,31	9,9926538

Giorni del mese.	Giorni della settimana.	Longitudine della Luna a mezzodì medio.	Longitudine della Luna a mezzanotte media.	Latitudine della Luna a mezzodì medio.	Latitudine della Luna a mezza notte media.	Passag. della Luna pel meridiano in tempo medio.
		° ° ′ ″	° ° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	h ′
1	Mart.	1 20 36 35	1 27 23 22	2 1 43A	2 34 32A	10 59
2	Merc.	2 4 7 0	2 10 47 11	3 4 54	3 32 25	11 53
3	Giov.	2 17 23 39	2 23 56 14	3 56 46	4 17 45	12 46
4	Ven.	3 0 24 47	3 6 49 12	4 35 8	4 48 50	13 38
5	Sab.	3 13 9 30	3 19 25 47	4 58 49	5 5 4	14 28
6	Dom.	3 25 38 10	4 1 46 52	5 7 38	5 6 36	15 16
7	Lun.	4 7 52 13	4 13 54 33	5 2 5	4 54 13	16 2
8	Mart.	4 19 54 19	4 25 51 59	4 43 10	4 29 6	16 45
9	Merc.	5 1 48 5	5 7 43 14	4 12 10	3 52 35	17 28
10	Giov.	5 13 38 5	5 19 33 10	3 30 31	3 6 10	18 10
11	Ven.	5 25 29 15	6 1 26 59	2 39 45	2 11 28	18 53
12	Sab.	6 7 27 2	6 13 30 5	1 41 34	1 10 17	19 36
13	Dom.	6 19 36 44	6 25 47 35	0 37 55	0 4 45	20 22
14	Lun.	7 2 3 10	7 8 23 56	0 28 51B	1 2 31B	21 11
15	Mart.	7 14 50 16	7 21 22 27	1 35 51	2 8 23	22 2
16	Merc.	7 28 0 35	8 4 44 42	2 39 37	3 9 4	22 57
17	Giov.	8 11 34 40	8 18 30 11	3 36 11	4 0 28	23 54
18	Ven.	8 25 30 50	9 2 36 2	4 21 24	4 38 31	* *
19	Sab.	9 9 45 7	9 16 57 16	4 51 25	4 59 48	0 52
20	Dom.	9 24 11 40	10 1 27 26	5 3 24	5 2 8	1 50
21	Lun.	10 8 43 45	10 15 59 47	4 55 59	4 45 3	2 47
22	Mart.	10 23 14 48	11 0 28 10	4 29 32	4 9 46	3 42
23	Merc.	11 7 39 23	11 14 48 3	3 46 8	3 19 4	4 35
24	Giov.	11 21 53 51	11 28 56 38	2 49 4	2 16 42	5 27
25	Ven.	0 5 56 20	0 12 52 55	1 42 30	1 7 1	6 18
26	Sab.	0 19 46 28	0 26 37 3	0 30 49	0 5 33A	7 9
27	Dom.	1 3 24 46	1 10 9 42	0 41 35A	1 16 44	8 0
28	Lun.	1 16 51 57	1 23 31 33	1 50 33	2 22 35	8 52
29	Mart.	2 0 8 33	2 6 42 55	2 52 27	3 19 45	9 45
30	Merc.	2 13 14 37	2 19 43 37	3 44 13	4 5 33	10 38
31	Giov.	2 26 9 50	3 2 33 12	4 23 33	4 38 5	11 30

Giorni del mese.	AR. della Luna nel merid.	Declin. della Luna nel merid.	Parallasse equatoriale della Luna a mezzo di medio.	Parallasse equatoriale della Luna a mezza notte media.	Diametro orizzontale della Luna a mezzo di medio.	Diametro orizzontale della Luna a mezza notte media.	Nascere della Luna in tempo medio.	Tramontare della Luna in tempo medio.
	h ′	° ′	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	h ′	h ′
1	3 40	17 0B	57 55	57 40	31 37	31 29	3 38	18 26
2	4 39	18 34	57 24	57 7	31 20	31 11	4 23	19 26
3	5 36	19 1	56 50	56 32	31 2	30 52	5 13	20 19
4	6 32	18 24	56 13	55 55	30 41	30 31	6 6	21 7
5	7 26	16 49	55 38	55 21	30 22	30 13	7 2	21 49
6	8 18	14 26	55 5	54 51	30 4	29 56	8 1	22 24
7	9 8	11 27	54 39	54 28	29 50	29 44	9 0	22 56
8	9 55	8 0	54 21	54 15	29 40	29 37	9 58	23 24
9	10 42	4 14	54 12	54 11	29 35	29 35	10 58	23 50
10	11 28	0 18	54 13	54 17	29 36	29 38	11 56	* *
11	12 15	3 41A	54 24	54 34	29 42	29 47	12 54	0 16
12	13 3	7 35	54 46	55 0	29 54	30 2	13 55	0 43
13	13 53	11 14	55 17	55 35	30 11	30 21	14 58	1 9
14	14 45	14 27	55 55	56 17	30 32	30 44	16 1	1 40
15	15 41	16 58	56 40	57 3	30 56	31 9	17 5	2 15
16	16 40	18 34	57 26	57 49	31 21	31 34	18 10	2 54
17	17 41	19 2	58 11	58 31	31 46	31 57	19 10	3 43
18	* *	* *	58 50	59 6	32 7	32 16	20 5	4 39
19	18 43	18 12	59 20	59 31	32 25	32 29	20 54	5 42
20	19 45	16 7	59 40	59 45	32 34	32 37	21 36	6 51
21	20 46	12 55	59 47	59 47	32 38	32 38	22 15	8 5
22	21 45	8 54	59 45	59 40	32 37	32 34	22 47	9 17
23	22 42	4 20	59 33	59 24	32 30	32 26	23 22	10 31
24	23 38	0 25B	59 14	59 3	32 20	32 14	23 54	11 42
25	0 33	5 5	58 51	58 38	32 8	32 1	* *	12 52
26	1 28	9 24	58 25	58 11	31 53	31 46	0 26	14 2
27	2 24	13 8	57 58	57 44	31 39	31 31	1 0	15 9
28	3 20	16 4	57 30	57 16	31 23	31 16	1 37	16 14
29	4 17	18 2	57 2	56 48	31 8	31 1	2 19	17 16
30	5 14	18 58	56 34	56 19	30 53	30 45	3 5	18 12
31	6 10	18 49	56 5	55 51	30 37	30 29	3 57	19 3

POSIZIONE DEI SATELLITI DI GIOVE.

Oriente 11h 25′ *Occidente*

| | | |

Semidiametro del Sole, tempo sidereo impiegato dal Sole a passare pel meridiano, e longitudine del nodo della Luna a mezzodì medio.

Giorni.	Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.	Giorni.	Semidiam. del Sole in arco.	Tem. sid. impieg. dal Sole a passare pel mer.	Longitud. del nodo della Luna.
	′ ″	′ ″	° ° ′		′ ″	′ ″	° ° ′
Gennajo 1	16 17,8	2 22,1	7 13 32	Luglio 6	15 45,6	2 17,1	7 3 41
7	16 17,7	2 21,4	7 13 13	12	15 45,7	2 16,4	7 3 22
13	16 17,4	2 20,4	7 12 54	18	15 46,0	2 15,6	7 3 3
19	16 17,0	2 19,3	7 12 35	24	15 46,5	2 14,6	7 2 44
25	16 16,4	2 18,1	7 12 16	30	15 47,2	2 13,6	7 2 25
31	16 15,6	2 16,8	7 11 57	Agosto 5	15 48,0	2 12,6	7 2 6
Febbrajo 6	16 14,6	2 15,5	7 11 38	11	15 48,9	2 11,6	7 1 46
12	16 13,5	2 14,1	7 11 19	17	15 50,0	2 10,7	7 1 27
18	16 12,3	2 12,8	7 10 59	23	15 51,2	2 9,8	7 1 8
24	16 11,0	2 11,6	7 10 40	29	15 52,5	2 9,1	7 0 49
Marzo 2	16 9,5	2 10,7	7 10 21	Settembre 4	15 53,9	2 8,6	7 0 30
8	16 8,0	2 9,9	7 10 2	10	15 55,4	2 8,3	7 0 11
14	16 6,4	2 9,3	7 9 43	16	15 56,9	2 8,1	6 29 52
20	16 4,8	2 9,0	7 9 24	22	15 58,5	2 8,2	6 29 33
26	16 3,1	2 8,8	7 9 5	28	16 0,1	2 8,5	6 29 14
Aprile 1	16 1,4	2 8,9	7 8 46	Ottobre 4	16 1,8	2 9,1	6 28 55
7	15 59,7	2 9,2	7 8 27	10	16 3,5	2 9,8	6 28 36
13	15 58,1	2 9,7	7 8 8	16	16 5,1	2 10,6	6 28 17
19	15 56,5	2 10,4	7 7 49	22	16 6,7	2 11,7	6 27 58
25	15 55,0	2 11,1	7 7 30	28	16 8,3	2 13,0	6 27 39
Maggio 1	15 53,5	2 11,9	7 7 11	Novembre 3	16 9,8	2 14,3	6 27 20
7	15 52,1	2 12,9	7 6 52	9	16 11,2	2 15,7	6 27 0
13	15 50,8	2 13,9	7 6 32	15	16 12,5	2 17,1	6 26 41
19	15 49,7	2 14,9	7 6 13	21	16 13,7	2 18,5	6 26 22
25	15 48,7	2 15,8	7 5 54	27	16 14,8	2 19,7	6 26 3
31	15 47,8	2 16,6	7 5 35	Dicembre 3	16 15,7	2 20,8	6 25 44
Giugno 6	15 47,0	2 17,2	7 5 16	9	16 16,5	2 21,7	6 25 25
12	15 46,4	2 17,6	7 4 57	15	16 17,1	2 22,2	6 25 6
18	15 46,0	2 17,8	7 4 38	21	16 17,5	2 22,4	6 24 47
24	15 45,7	2 17,8	7 4 19	27	16 17,7	2 22,4	6 24 28
30	15 45,5	2 17,6	7 4 0				

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	9 0 11	3 10B	18 0	20 16A	18 42	23 17	3 52
	7	8 27 23	2 58	17 48	20 27	18 8	22 42	3 16
	13	8 29 38	2 9	17 58	21 19	17 58	22 28	2 58
	19	9 4 57	1 10	18 21	22 11	18 1	22 27	2 53
	25	9 12 0	0 15	18 52	22 40	18 11	22 34	2 57
	31	9 19 56	0 34A	19 26	22 32	18 21	22 45	3 9
Febbrajo	6	9 28 31	1 16	20 3	21 41	18 31	22 59	3 27
	12	10 7 41	1 44	20 42	20 2	18 37	23 14	3 51
	18	10 17 22	2 3	21 22	17 36	18 42	23 30	4 18
	24	10 27 36	2 7	22 2	14 18	18 43	23 46	4 49
Marzo	2	11 8 27	1 55	22 43	10 12	18 43	0 4	5 25
	8	11 19 52	1 25	23 24	5 50	18 42	0 22	6 2
	14	0 1 41	0 35	0 7	0 6B	18 38	0 40	6 42
	20	0 13 11	0 32B	0 48	5 41	18 31	0 57	7 23
	26	0 23 7	1 44	1 23	10 36	18 22	1 9	7 56
Aprile	1	1 0 4	2 44	1 48	14 3	18 8	1 10	8 12
	7	1 3 10	3 9	1 59	15 33	17 49	0 58	8 7
	13	1 2 20	2 46	1 56	14 54	17 26	0 32	7 38
	19	0 28 50	1 34	1 44	12 33	17 0	23 56	6 52
	25	0 25 1	0 5A	1 32	9 36	16 37	23 20	6 3
Maggio	1	0 23 3	1 37	1 27	7 26	16 18	22 52	5 26
	7	0 23 51	2 43	1 32	6 43	16 3	22 33	5 3
	13	0 27 14	3 16	1 45	7 26	15 48	22 22	4 56
	19	1 2 49	3 19	2 6	9 18	15 38	22 20	5 2
	25	1 10 10	2 58	2 34	12 2	15 31	22 24	5 17
	31	1 19 7	2 16	3 9	15 18	15 27	22 35	5 43
Giugno	6	1 29 35	1 19	3 50	18 45	15 29	22 53	6 17
	12	2 11 27	0 14	4 39	21 54	15 38	23 18	6 58
	18	2 24 19	0 48B	5 34	24 7	15 58	23 50	7 42
	24	3 7 22	1 33	6 32	24 47	16 27	0 23	8 19
	30	3 19 47	1 52	7 26	23 30	17 4	0 54	8 44

Posizioni di Mercurio di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′ ″	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Luglio	6	4 1 6	1 46B	8 15	21 38B	17 40	1 19	8 58
	12	4 11 15	1 19	8 56	18 40	18 12	1 36	9 0
	18	4 20 10	0 34	9 32	15 18	18 39	1 47	8 55
	24	4 27 49	0 25A	10 0	11 51	18 59	1 52	8 45
	30	5 4 0	1 32	10 21	8 38	19 11	1 50	8 29
Agosto	5	5 8 15	2 43	10 35	5 57	19 13	1 41	8 9
	11	5 10 2	3 49	10 40	4 15	19 3	1 23	7 43
	17	5 8 42	4 33	10 34	4 3	18 34	0 53	7 12
	23	5 4 25	4 29	10 18	5 41	17 47	0 13	6 39
	29	4 29 19	3 21	10 0	8 34	16 54	23 32	6 10
Settem.	4	4 27 0	1 32	9 54	11 5	16 13	23 2	5 51
	10	4 29 37	0 11B	10 6	11 48	15 58	22 50	5 42
	16	5 6 47	1 20	10 36	10 17	16 10	22 56	5 42
	22	5 16 39	1 49	11 13	6 58	16 38	23 10	5 42
	28	5 27 27	1 46	11 53	2 39	17 12	23 26	5 40
Ottobre	4	6 8 14	1 24	12 32	1 57A	17 46	23 41	5 36
	10	6 18 38	0 51	13 10	6 30	18 19	23 55	5 31
	16	6 28 36	0 11	13 46	10 47	18 49	0 8	5 27
	22	7 8 12	0 30A	14 22	14 42	19 18	0 20	5 22
	28	7 17 27	1 9	14 58	18 8	19 47	0 33	5 19
Novem.	3	7 26 25	1 44	15 34	21 3	20 14	0 45	5 16
	9	8 5 3	2 13	16 10	23 19	20 38	0 58	5 18
	15	8 13 13	2 30	16 46	24 52	20 57	1 9	5 21
	21	8 20 30	2 31	17 18	25 37	21 11	1 18	5 25
	27	8 25 53	2 4	17 42	25 28	21 10	1 18	5 26
Dicem.	3	8 27 22	0 55	17 49	24 22	20 48	1 2	5 16
	9	8 22 54	0 56B	17 29	22 20	19 53	0 18	4 43
	15	8 15 15	2 32	16 57	20 5	18 44	23 21	3 58
	21	8 11 34	2 57	16 41	19 14	18 2	22 43	3 24
	27	8 13 32	2 28	16 50	19 59	17 50	22 27	3 4

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′ ″	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	10 27 32	0 48A	22 0	13 6A	22 9	3 17	8 25
	7	11 2 53	0 7	22 20	10 34	21 54	3 13	8 32
	13	11 7 46	0 42B	22 37	8 1	21 36	3 6	8 36
	19	11 12 4	1 37	22 51	5 32	21 18	2 58	8 38
	25	11 15 38	2 41	23 3	3 11	20 56	2 46	8 36
	31	11 18 15	3 52	23 11	1 5	20 30	2 30	8 29
Febbr.	6	11 19 44	5 8	23 14	0 40B	20 4	2 10	8 16
	12	11 19 50	6 22	23 13	1 52	19 34	1 45	7 56
	18	11 18 27	7 33	23 6	2 25	19 1	1 14	7 27
	24	11 15 44	8 24	22 54	2 9	18 27	0 39	6 51
Marzo	2	11 12 13	8 45	22 41	1 10	17 54	0 2	6 10
	8	11 8 39	8 35	22 28	0 22A	17 23	23 25	5 27
	14	11 5 50	7 53	22 18	2 3	16 57	22 52	4 47
	20	11 4 18	6 52	22 14	3 33	16 36	22 24	4 12
	26	11 4 17	5 41	22 16	4 40	16 18	22 2	3 46
Aprile	1	11 5 35	4 30	22 22	5 19	16 4	21 45	3 26
	7	11 8 0	3 21	22 33	5 30	15 52	21 32	3 12
	13	11 11 20	2 18	22 47	5 13	15 40	21 22	3 4
	19	11 15 24	1 22	23 4	4 31	15 30	21 15	3 0
	25	11 20 2	0 33	23 22	3 27	15 21	21 10	2 59
Maggio	1	11 25 8	0 9A	23 42	2 6	15 11	21 6	3 1
	7	0 0 35	0 46	0 3	0 30	15 2	21 3	3 4
	13	0 6 18	1 16	0 25	1 19B	14 53	21 2	3 11
	19	0 12 16	1 40	0 48	3 17	14 44	21 1	3 18
	25	0 18 26	2 0	1 11	5 22	14 35	21 0	3 26
	31	0 24 44	2 13	1 35	7 30	14 27	21 1	3 35
Giugno	6	1 1 10	2 22	1 59	9 39	14 19	21 2	3 45
	12	1 7 43	2 26	2 24	11 46	14 11	21 3	3 55
	18	1 14 21	2 27	2 50	13 48	14 4	21 5	4 6
	24	1 21 5	2 23	3 17	15 44	13 58	21 8	4 18
	30	1 27 52	2 16	3 44	17 29	13 56	21 12	4 30

Posizioni di Venere di sei in sei giorni a mezzodì medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′ ″	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Luglio	6	2 4 43	2 6A	4 22	19 1B	13 51	21 16	4 41
	12	2 11 38	1 54	4 41	20 19	13 49	21 21	4 53
	18	2 18 35	1 40	5 21	21 19	13 50	21 27	5 4
	24	2 25 36	1 23	5 41	21 59	13 53	21 34	5 14
	30	3 2 40	1 5	6 11	22 20	13 58	21 40	5 22
Agosto	5	3 9 45	0 48	6 42	22 18	14 5	21 47	5 29
	11	3 16 54	0 29	7 13	21 54	14 15	21 55	5 33
	17	3 24 5	0 11	7 44	21 8	14 27	22 2	5 37
	23	4 1 19	0 7B	8 14	20 0	14 39	22 9	5 39
	29	4 8 34	0 24	8 44	18 31	14 52	22 15	5 38
Settem.	4	4 15 52	0 40	9 14	16 43	15 7	22 21	5 36
	10	4 23 12	0 53	9 43	14 38	15 23	22 27	5 31
	16	5 0 34	1 5	10 12	12 18	15 38	22 32	5 26
	22	5 7 57	1 14	10 40	9 45	15 53	22 36	5 19
	28	5 15 22	1 22	11 8	7 2	16 9	22 41	5 12
Ottobre	4	5 22 49	1 26	11 36	4 12	16 25	22 45	5 4
	10	6 0 16	1 29	12 3	1 16	16 40	22 48	4 56
	16	6 7 45	1 30	12 31	1 41A	16 56	22 52	4 48
	22	6 15 15	1 27	12 58	4 39	17 12	22 56	4 40
	28	6 22 45	1 23	13 26	7 34	17 28	23 0	4 33
Novem.	3	7 0 16	1 16	13 54	10 23	17 45	23 5	4 26
	9	7 7 47	1 6	14 23	13 3	18 1	23 10	4 19
	15	7 15 19	0 56	14 52	15 32	18 18	23 16	4 14
	21	7 22 52	0 44	15 22	17 47	18 35	23 22	4 9
	27	8 0 25	0 31	15 53	19 44	18 51	23 29	4 7
Dicem.	3	8 7 57	0 18	16 25	21 21	19 7	23 37	4 7
	9	8 15 30	0 3	16 57	22 37	19 22	23 46	4 9
	15	8 23 4	0 11A	17 29	23 27	19 36	23 55	4 14
	21	9 0 38	0 25	18 2	23 52	19 47	0 4	4 21
	27	9 8 11	0 39	18 36	23 50	19 56	0 13	4 30

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a 12h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	0 6 44	0 0	0 25	2 41B	23 26	5 40	11 54
	7	0 10 33	0 8B	0 38	4 17	23 9	5 30	11 51
	13	0 14 21	0 15	0 52	5 53	22 54	5 21	11 48
	19	0 18 11	0 22	1 6	7 27	22 37	5 11	11 45
	25	0 22 3	0 27	1 20	9 0	22 21	5 1	11 41
	31	0 25 54	0 32	1 35	10 31	22 5	4 52	11 39
Febbrajo	6	0 29 47	0 37	1 50	11 58	21 50	4 43	11 36
	12	1 3 40	0 42	2 5	13 23	21 35	4 34	11 33
	18	1 7 33	0 46	2 20	14 46	21 20	4 26	11 32
	24	1 11 26	0 50	2 35	16 3	21 6	4 17	11 28
Marzo	2	1 15 20	0 53	2 50	17 17	20 52	4 9	11 26
	8	1 19 13	0 56	3 6	18 26	20 38	4 1	11 24
	14	1 23 6	0 58	3 22	19 30	20 25	3 53	11 21
	20	1 26 59	1 0	3 38	20 29	20 12	3 45	11 18
	26	2 0 51	1 2	3 54	21 22	20 1	3 38	11 15
Aprile	1	2 4 43	1 4	4 10	22 9	19 49	3 30	11 11
	7	2 8 35	1 6	4 26	22 50	19 38	3 23	11 8
	13	2 12 26	1 8	4 43	23 25	19 28	3 16	11 4
	19	2 16 17	1 9	5 0	23 53	19 18	3 9	11 0
	25	2 20 7	1 10	5 17	24 15	19 9	3 2	10 55
Maggio	1	2 23 57	1 11	5 34	24 30	19 1	2 55	10 49
	7	2 27 46	1 12	5 50	24 38	18 53	2 48	10 43
	13	3 1 36	1 12	6 7	24 39	18 47	2 42	10 37
	19	3 5 24	1 13	6 23	24 33	18 41	2 35	10 29
	25	3 9 13	1 13	6 40	24 21	18 35	2 28	10 21
	31	3 13 1	1 13	6 57	24 2	18 30	2 21	10 12
Giugno	6	3 16 49	1 13	7 14	23 36	18 24	2 14	10 3
	12	3 20 37	1 13	7 30	23 5	18 20	2 6	9 53
	18	3 24 24	1 13	7 46	22 27	18 16	1 59	9 42
	24	3 28 11	1 13	8 2	21 44	18 12	1 51	9 30
	30	4 1 59	1 13	8 18	20 55	18 9	1 44	9 18

Posizioni di Marte di sei in sei giorni a 12h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Luglio	6	4 5 46	1 12B	8 33	20 0B	18 6	1 36	9 6
	12	4 9 33	1 12	8 49	19 1	18 2	1 28	8 53
	18	4 13 20	1 11	9 4	17 58	17 58	1 19	8 40
	24	4 17 8	1 10	9 20	16 49	17 55	1 11	8 26
	30	4 20 56	1 9	9 35	15 37	17 52	1 2	8 12
Agosto	5	4 24 43	1 8	9 49	14 22	17 49	0 53	7 57
	11	4 28 31	1 7	10 4	13 3	17 46	0 44	7 42
	17	5 2 20	1 6	10 19	11 41	17 43	0 35	7 27
	23	5 6 10	1 5	10 33	10 16	17 40	0 26	7 12
	29	5 9 59	1 4	10 47	8 49	17 37	0 17	6 56
Settem.	4	5 13 49	1 2	11 1	7 20	17 34	0 7	6 40
	10	5 17 39	1 1	11 16	5 49	17 31	23 58	6 25
	16	5 21 30	0 59	11 30	4 17	17 28	23 48	6 9
	22	5 25 21	0 58	11 44	2 44	17 25	23 39	5 53
	28	5 29 14	0 56	11 59	1 10	17 21	23 29	5 37
Ottobre	4	6 3 7	0 54	12 13	0 25A	17 18	23 20	5 22
	10	6 7 1	0 52	12 27	1 59	17 16	23 11	5 6
	16	6 10 56	0 50	12 41	3 34	17 13	23 1	4 50
	22	6 14 51	0 48	12 56	5 7	17 10	22 52	4 34
	28	6 18 47	0 45	13 11	6 40	17 7	22 43	4 19
Novem.	3	6 22 45	0 43	13 25	8 11	17 5	22 34	4 3
	9	6 26 43	0 40	13 40	9 41	17 2	22 25	3 48
	15	7 0 42	0 37	13 55	11 8	16 59	22 16	3 33
	21	7 4 42	0 35	14 10	12 33	16 57	22 8	3 19
	27	7 8 43	0 32	14 26	13 55	16 55	22 0	3 5
Dicem.	3	7 12 45	0 29	14 42	15 12	16 53	21 52	2 52
	9	7 16 48	0 26	14 58	16 27	16 51	21 45	2 39
	15	7 20 52	0 22	15 14	17 37	16 49	21 37	2 26
	21	7 24 57	0 19	15 30	18 42	16 47	21 30	2 13
	27	7 29 4	0 15	15 47	19 42	16 45	21 23	2 1

Posizioni di Cerere di sei in sei giorni a 12^h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′ ″	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Settem.	1	2 1 47	7 41A	4 5	13 0B	10 24	17 22	0 20
	7	2 2 46	7 45	4 9	13 7	10 4	17 2	0 0
	13	2 3 31	7 47	4 12	13 13	9 43	16 42	23 40
	19	2 4 0	7 49	4 14	13 17	9 22	16 21	23 20
	25	2 4 30	7 51	4 16	13 19	8 59	15 58	22 57
Ottobre	1	2 4 30	7 51	4 16	13 20	8 36	15 35	22 34
	7	2 4 30	7 51	4 16	13 20	8 12	15 11	22 10
	13	2 4 1	7 47	4 14	13 19	7 47	14 46	21 45
	19	2 3 31	7 44	4 12	13 17	7 21	14 20	21 19
	25	2 2 48	7 37	4 9	13 15	6 54	13 53	20 52
	31	2 1 36	7 25	4 4	13 13	6 26	13 25	20 24
Novem.	6	2 0 22	7 13	3 59	13 11	5 57	12 56	19 55
	12	1 29 10	6 58	3 54	13 10	5 28	12 27	19 26
	18	1 27 43	6 41	3 48	13 10	4 59	11 58	18 57
	24	1 26 16	6 18	3 42	13 12	4 29	11 28	18 27
	30	1 24 52	5 54	3 36	13 16	4 0	10 59	17 58
Dicem.	6	1 23 40	5 29	3 31	13 23	3 31	10 30	17 29
	12	1 22 35	5 2	3 26	13 33	3 1	10 1	17 1
	18	1 21 42	4 36	3 22	13 46	2 32	9 33	16 34
	24	1 21 3	4 11	3 19	14 1	2 5	9 7	16 9
	30	1 20 40	3 45	3 17	14 19	1 38	8 41	15 44

POSIZIONI DI PALLADE DI SEI IN SEI GIORNI
A 12h DI TEMPO MEDIO.

Mese	Giorno	Longitudine	Latitudine	Ascensione retta	Declinazione	Nascere	Passaggio pel merid.	Tramontare
		° ′ ″	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Agosto	1	0 13 56	5 24	0 56	2 42B	10 1	16 15	22 29
	7	0 14 5	5 57	0 58	1 54	9 42	15 53	22 4
	13	0 15 43	6 51	0 58	0 58	9 23	15 30	21 37
	19	0 13 19	6 46	0 58	0 4A	9 3	15 6	21 9
	25	0 12 37	6 47	0 57	1 16	8 43	14 42	20 40
	31	0 11 37	7 51	0 55	2 38	8 23	14 16	20 9
Settem.	6	0 10 55	9 0	0 53	4 6	8 3	13 50	19 37
	12	0 9 17	10 6	0 50	5 36	7 43	13 23	19 3
	18	0 7 43	11 9	0 46	7 11	7 23	12 56	18 29
	24	0 5 55	12 9	0 41	8 46	7 1	12 28	17 55
	30	0 4 14	13 8	0 37	10 20	6 40	12 0	17 20
Ottobre	6	0 2 34	14 2	0 32	11 50	6 18	11 32	16 46
	12	0 1 0	14 51	0 28	13 14	5 56	11 4	16 12
	18	11 29 24	15 34	0 23	14 30	5 34	10 36	15 38
	24	11 28 0	16 10	0 19	15 36	5 11	10 8	15 5
	30	11 26 54	16 43	0 16	16 32	4 48	9 41	14 33
Novem.	5	11 26 7	17 12	0 14	17 17	4 25	9 14	14 3
	11	11 25 24	17 33	0 12	17 53	4 2	8 48	13 34
	17	11 25 0	17 50	0 11	18 18	3 39	8 24	13 9
	23	11 24 53	18 3	0 11	18 33	3 17	8 1	12 45
	29	11 25 2	18 16	0 12	18 40	2 55	7 38	12 21

Posizioni di Giunone di sei in sei giorni a 12h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′ ″	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Marzo	1	7 19 7	10 22B	15 18	7 31A	11 10	16 40	22 12
	7	7 19 0	10 49	15 18	7 4	10 44	16 18	21 52
	13	7 19 0	11 20	15 19	6 34	10 18	15 54	21 30
	19	7 18 42	11 50	15 18	6 0	9 50	15 29	21 8
	25	7 18 3	12 18	15 16	5 24	9 22	15 4	20 45
	31	7 17 23	12 46	15 14	4 46	8 54	14 38	20 22
Aprile	6	7 16 28	13 10	15 11	4 7	8 25	14 12	19 58
	12	7 15 17	13 33	15 7	3 27	7 55	13 44	19 33
	18	7 14 7	13 53	15 3	2 48	7 24	13 16	19 8
	24	7 12 41	14 8	14 58	2 9	6 53	12 48	18 43
	30	7 11 25	14 22	14 54	1 32	6 23	12 20	18 17
Maggio	6	7 10 8	14 34	14 49	1 0	5 52	11 51	17 50
	12	7 8 54	14 41	14 45	0 31	5 22	11 23	17 24
	18	7 7 38	14 41	14 40	0 9	4 52	10 55	16 58
	24	7 6 29	14 34	14 35	0 10B	4 24	10 27	16 31
	30	7 5 31	14 28	14 32	0 21	3 56	10 0	16 4
Giugno	5	7 4 44	14 22	14 29	0 29	3 28	9 33	15 38
	11	7 4 0	14 16	14 26	0 30	3 2	9 7	15 12
	17	7 3 32	14 1	14 24	0 26	2 36	8 41	14 46
	23	7 3 20	13 39	14 23	0 18	2 12	8 16	14 20
	29	7 3 21	13 16	14 23	0 3	1 49	7 52	13 55

POSIZIONE DI VESTA DI SEI IN SEI GIORNI.
A 12h DI TEMPO MEDIO.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Febbrajo	1	2 2 27	3 0A	4 4	17 44B	23 58	7 17	14 36
	7	2 3 15	2 42	4 7	18 10	23 35	6 56	14 17
	13	2 4 2	2 23	4 10	18 37	23 12	6 36	14 0
	19	2 5 3	2 7	4 14	19 4	22 51	6 17	13 42
	25	2 6 31	1 54	4 20	19 32	22 30	5 58	13 26
Marzo	3	2 8 0	1 41	4 26	20 0	22 10	5 40	13 16
	9	2 9 30	1 28	4 32	20 28	21 50	5 23	12 56
	15	2 11 8	1 14	4 39	20 55	21 32	5 7	12 42
	21	2 12 48	1 1	4 46	21 21	21 13	4 50	12 27
	27	2 14 42	0 48	4 54	21 46	20 54	4 34	12 14
Aprile	2	2 16 49	0 39	5 3	22 9	20 37	4 19	12 1
	8	2 18 56	0 30	5 12	22 30	20 22	4 5	11 48
	14	2 21 6	0 20	5 21	22 49	20 5	3 50	11 35
	20	2 23 20	0 11	5 31	23 6	19 49	3 36	11 23
	26	2 25 38	0 2	5 41	23 21	19 34	3 22	11 10
Maggio	2	2 27 56	0 7B	5 51	23 33	19 20	3 9	10 58
	8	3 0 17	0 16	6 1	23 43	19 6	2 56	10 46
	14	3 2 45	0 24	6 12	23 49	18 52	2 43	10 34
	20	3 5 15	0 32	6 23	23 52	18 39	2 30	10 21
	26	3 8 43	0 39	6 34	23 52	18 26	2 17	10 8

POSIZIONI DI GIOVE DI DODICI IN DODICI GIORNI A 12h DI TEMPO MEDIO.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		s ° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	1 0 56	1 12A	1 57	10 41B	0 24	7 12	13 59
	13	1 1 27	1 8	1 59	10 55	23 37	6 46	13 15
	25	1 2 27	1 5	2 2	11 18	22 53	5 43	12 33
Febbr.	6	1 3 50	1 2	2 7	11 50	22 9	5 1	11 55
	18	1 5 34	0 59	2 14	12 28	21 25	4 20	11 15
Marzo	2	1 7 36	0 56	2 22	13 11	20 42	3 41	10 40
	14	1 9 54	0 54	2 31	13 57	20 1	3 3	10 5
	26	1 12 22	0 52	2 41	14 44	19 20	2 25	9 30
Aprile	7	1 15 0	0 50	2 51	15 33	18 39	1 48	8 57
	19	1 17 43	0 49	3 2	16 21	17 59	1 12	8 25
Maggio	1	1 20 31	0 48	3 13	17 8	17 20	0 36	7 52
	13	1 23 21	0 47	3 25	17 53	16 40	0 0	7 20
	25	1 26 11	0 46	3 37	18 35	16 0	23 24	6 48
Giugno	6	1 28 58	0 46	3 48	19 13	15 21	22 48	6 15
	18	2 1 42	0 45	3 59	19 47	14 43	22 12	5 41
	30	2 4 19	0 45	4 10	20 18	14 4	21 36	5 8
Luglio	12	2 6 48	0 44	4 20	20 44	13 25	20 59	4 33
	24	2 9 6	0 44	4 30	21 6	12 45	20 21	3 57
Agosto	5	2 11 14	0 45	4 39	21 24	12 6	19 43	3 20
	17	2 13 4	0 45	4 47	21 38	11 25	19 4	2 43
	29	2 14 33	0 46	4 54	21 48	10 43	18 23	2 3
Settem.	10	2 15 40	0 46	4 58	21 55	9 58	17 39	1 20
	22	2 16 25	0 46	5 1	21 59	9 14	16 55	0 36
Ottobre	4	2 16 38	0 47	5 2	22 0	8 28	16 9	23 50
	16	2 16 24	0 47	5 1	21 59	7 40	15 21	23 2
	28	2 15 44	0 47	4 59	21 55	6 50	14 31	22 12
Novem.	9	2 14 36	0 47	4 54	21 47	5 59	13 39	21 19
	21	2 13 12	0 46	4 47	21 38	5 6	12 45	20 24
Dicem.	3	2 11 35	0 45	4 40	21 27	4 13	11 51	19 29
	15	2 10 40	0 43	4 34	21 15	3 20	10 57	18 34
	27	2 8 36	0 41	4 28	21 4	2 28	10 3	17 38

POSIZIONI DI SATURNO DI DODICI IN DODICI GIORNI A 12h DI TEMPO MEDIO.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′ ″	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	10 16 51	1 5A	21 18	16 49A	21 42	2 34	7 26
	13	10 18 11	1 5	21 24	16 25	20 57	1 51	6 45
	25	10 19 34	1 6	21 29	16 0	20 13	1 9	6 5
Febbrajo	6	10 20 57	1 7	21 35	15 33	19 30	0 28	5 26
	18	10 22 21	1 7	21 41	15 6	18 47	23 47	4 47
Marzo	2	10 23 46	1 8	21 46	14 39	18 3	23 5	4 7
	14	10 25 9	1 9	21 52	14 12	17 18	22 22	3 26
	26	10 26 26	1 11	21 57	13 47	16 33	21 39	2 45
Aprile	7	10 27 35	1 13	22 1	13 25	15 50	20 57	2 4
	19	10 28 35	1 14	22 5	13 5	15 5	20 14	1 23
Maggio	1	10 29 27	1 16	22 8	12 50	14 20	19 30	0 40
	13	11 0 10	1 18	22 11	12 39	13 35	18 45	23 55
	25	11 0 36	1 21	22 13	12 32	12 49	18 0	23 11
Giugno	6	11 0 46	1 23	22 14	12 30	12 3	17 14	22 25
	18	11 0 45	1 26	22 13	12 33	11 15	16 26	21 37
	30	11 0 30	1 28	22 12	12 41	10 28	15 38	20 48
Luglio	12	11 0 2	1 30	22 11	12 53	9 40	14 49	19 58
	24	10 29 21	1 32	22 8	13 9	8 51	13 59	19 7
Agosto	5	10 28 34	1 34	22 5	13 28	8 2	13 9	18 16
	17	10 27 41	1 36	22 2	13 48	7 12	12 18	17 24
	29	10 26 47	1 36	21 58	14 7	6 23	11 27	16 31
Settem.	10	10 25 56	1 36	21 55	14 24	5 34	10 37	15 40
	22	10 25 12	1 35	21 52	14 39	4 45	9 47	14 49
Ottobre	4	10 24 40	1 35	21 50	14 50	3 56	8 57	13 58
	16	10 24 18	1 35	21 48	14 56	3 6	8 8	13 8
	28	10 24 8	1 34	21 48	14 58	2 20	7 20	12 20
Novem.	9	10 24 16	1 33	21 48	14 55	1 33	6 33	11 33
	21	10 24 39	1 32	21 50	14 46	0 46	5 47	10 48
Dicem.	3	10 25 15	1 31	21 52	14 33	0 0	5 2	10 4
	15	10 26 3	1 30	21 55	14 15	23 15	4 18	9 21
	27	10 27 0	1 29	21 59	13 54	22 30	3 35	8 40

Posizioni di Urano di dodici in dodici giorni a 12h di tempo medio.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	0 6 28	0 42A	0 25	1 56B	23 29	5 40	11 51
	13	0 6 43	0 42	0 26	2 2	22 42	4 53	11 4
	25	0 7 4	0 41	0 27	2 10	21 55	4 7	10 19
Febbrajo	6	0 7 31	0 41	0 29	2 22	21 9	3 22	9 35
	18	0 8 3	0 40	0 31	2 35	20 22	2 36	8 50
Marzo	2	0 8 40	0 40	0 33	2 49	19 37	1 51	8 5
	14	0 9 19	0 40	0 35	3 5	18 51	1 6	7 21
	26	0 10 0	0 39	0 38	3 21	18 4	0 21	6 38
Aprile	7	0 10 42	0 39	0 40	3 37	17 19	23 37	5 55
	19	0 11 20	0 40	0 43	3 53	16 33	22 52	5 11
Maggio	1	0 11 57	0 40	0 45	4 8	15 47	22 7	4 27
	13	0 12 33	0 40	0 47	4 22	15 1	21 22	3 43
	25	0 13 5	0 40	0 49	4 34	14 14	20 36	2 58
Giugno	6	0 13 31	0 40	0 51	4 44	13 28	19 51	2 13
	18	0 13 52	0 41	0 52	4 52	12 42	19 5	1 28
	30	0 14 7	0 41	0 53	4 57	11 54	18 18	0 42
Luglio	12	0 14 14	0 41	0 54	4 59	11 8	17 32	23 56
	24	0 14 14	0 41	0 54	4 59	10 20	16 44	23 8
Agosto	5	0 14 8	0 42	0 53	4 57	9 33	15 57	22 20
	17	0 13 56	0 42	0 53	4 52	8 46	15 9	21 32
	29	0 13 37	0 42	0 51	4 44	7 58	14 20	20 43
Settem.	10	0 13 14	0 42	0 50	4 34	7 9	13 31	19 53
	22	0 12 47	0 43	0 48	4 24	6 22	12 43	19 4
Ottobre	4	0 12 18	0 43	0 46	4 13	5 34	11 54	18 14
	16	0 11 50	0 43	0 44	4 1	4 45	11 4	17 25
	28	0 11 24	0 43	0 43	3 51	3 56	10 15	16 34
Novem.	9	0 11 59	0 42	0 42	3 42	3 9	9 27	15 45
	21	0 10 40	0 42	0 40	3 35	2 20	8 38	14 56
Dicem.	3	0 10 28	0 42	0 39	3 30	1 33	7 50	14 7
	15	0 10 22	0 41	0 39	3 28	0 45	7 2	13 19
	27	0 10 21	0 41	0 39	3 29	23 58	6 15	12 32

Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Gennaio	
1	♂ in ♋.
3	☿ nella massima lat. B.
7	♀ in ♋.
8	♀ nel massimo splendore.
12	☾ apogea.
18	☿ nella massima elong. occ.
19	☉ entra in ♒ a 21ʰ 43′.
21	♃ in quadratura col ☉.
26	☾ perigea.
26	☿ in ♑.
Febbraio	
5	☿ nell' afelio.
8	☾ apogea.
10	♀ nel perielio.
18	☉ entra in ♓ a 12ʰ 24′.
18	Occultaz. di 8 β ♏ prec. 2.ª
24	☾ perigea.
26	☿ nella massima lat. A.
Marzo	
2	♀ ☌ inf. ☉.
4	☿ nella massima lat. B.
5	☿ ☌ inf. ☉.
8	☾ apogea.
17	☿ in ♋.
20	☉ entra in ♈ a 12ʰ 23′.
21	☿ nel perielio.
24	☾ perigea.
30	☿ nella mass. elong. orient.
30	♅ ☌ ☉.

Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Aprile	
1	☿ nella massima lat. B.
5	☾ apogea.
18	☿ ☌ inf. ☉.
20	☉ entra in ♉ a 0ʰ 32′.
20	☾ perigea.
24	☿ in ♑.
25	Eclisse parziale di Sole.
29	♀ in ♑.
Maggio	
1	♅ ☌ ☉.
2	☾ apogea.
4	☿ nell' afelio.
10	☿ nella mass. elongaz. occid.
11	Occultaz. di β ♏ prec. 2.ª
14	♃ ☌ ☉.
15	☾ perigea.
16	☿ nella mass. elong. occid.
21	☉ entra in ♊ a 0ʰ 38′.
21	♄ in quadratura col ☉.
25	☿ nella massima lat. A.
30	☾ apogea.
Giugno	
2	♀ nell' afelio.
11	☾ perigea.
13	☿ in ♋.
17	☿ nel perielio.
20	☿ ☌ inf. ☉.
21	☉ entra in ♋ a 9ʰ 7′.
25	♀ nella massima lat. A.
27	☾ apogea.
28	☿ nella massima lat. B.

Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Luglio	
2	Occultaz. di α ♍ (Spica) 1.ª
6	♅ in quadratura col ☉.
9	☾ perigea.
21	☿ in ♌.
22	☉ entra in ♎ a 19ʰ 59′.
24	☾ apogea.
28	☿ nella mass. elong. orient.
31	☿ nell' afelio.
Agosto	
7	☾ perigea.
8	♂ nell' afelio.
20	♄ ☌ ☉.
20	☿ in ♋.
21	☾ apogea.
21	☿ nella massima lat. A.
23	☉ entra in ♍ a 2ʰ 28′.
25	☿ ☌ inf. ☉.
Settembre	
4	☾ perigea.
8	♃ in quadratura col ☉.
9	☿ in ♋.
9	♂ ☌ ☉.
10	☿ nella massima elong. occid.
13	☿ nel perielio.
17	☾ apogea.
22	☉ entra in ♎ a 23ʰ 8′.
23	☿ nel perielio.
24	☿ nella massima latitud. B.
28	☿ ☌ ☉.

Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Ottobre	
2	☾ perigea.
5	♅ ☌ ☉.
7	☿ inf. ☉.
14	☾ apogea.
15	☿ nella massima lat. B.
17	☿ in ♌.
23	☉ entra in ♏ a 7ʰ 23′.
27	☿ nell' afelio.
30	☾ perigea.
Novembre	
11	☾ apogea.
16	♄ in quadratura col ☉.
17	☿ nella massima lat. A.
19	☿ ☌ ☉.
22	☉ entra in ♐ a 4ʰ 1′.
22	☿ nella mass. elong. orient.
25	☾ perigea.
Dicembre	
3	♃ ☌ ☉.
6	☿ in ♋.
9	☾ apogea.
10	☿ in ♌.
10	☿ nel perielio.
11	☿ inf. ☉.
15	☿ sup. ☉.
17	Occultazione di ☿.
21	☿ nella massima lat. B.
21	☉ entra in ♑ a 16ʰ 50′.
21	☾ perigea.
31	☿ nella massima elong. occid.
31	♅ in quadratura col ☉.

APPENDICE

ALLE EFFEMERIDI

DELL' ANNO 1846.

SOLSTIZJ

OSSERVATI COL CIRCOLO MOLTIPLICATORE

DI REICHENBACH

NEGLI ANNI 1842, 1843 E 1844

DA

FRANCESCO CARLINI.

Alle osservazioni pubblicate nell'Appendice a queste Effemeridi per l'anno 1844 aggiungo quelle fatte posteriormente sino al solstizio estivo del 1844. Prima di tutto però mi conviene presentare una nota di errori di cifre che sono scorsi nell'Appendice suddetta, della quale, trovandomi assente mentre si stampava, non ho potuto io stesso rivedere le prove. Questi errori non alterano in nulla le cifre dei risultamenti finali che trovansi alla pagina 89 ed alle seguenti dell'Appendice suddetta; ciò null'ostante ho creduto conveniente il riprodurre corrette le tavole dalla pag. 63 alla 88 in cui si danno le riduzioni delle osservazioni, limitando l'errata alle precedenti che contengono le osservazioni originali.

Pag.	*Linea.*	*Colonna.*	*Errori.*	*Correzioni.*
11	8 e 9		fatte e cogli	fatte cogli
	12		$p^2 - 4p - 4$	$p^2 - 4p + 4$
	Giorno.			
13	15 dicembre	3	65	69
	17	3 e 4	154 | 276	155 | 277
14	18	3	148	145
		2	42 0	43 0
	22	2	0 0	18 0 0
15	9 gennajo	6	+ 0,4	− 0,4
	7 giugno	5	9°	91°
		1	4 20	4 40
16	9	5	3° 32′	3° 35′
			93 41	93 43
19	27	3	150	150,5
		5	220°	320°
	28	5	18″,68	18″,18
20	4 luglio	3	137	131
21	12 dicembre	5	42″,41	52″,41
23	20	2,3,4,5		si cancelli la prima serie d'osservazioni
		5	57′ 27″,78	41′ 15″,78
24	3 gennajo	6	6,70	7,70
	4	1	fra Ie	fra Ie
26	15 giugno	6	28,25	25,25
29	23	5	37″,00	27″,00
			127°	227°
32	6 luglio	5	292°	291°
33	31 dicembre	2	56′ 50″	18ʰ 56′ 50″

Pag.	*Giorno.*	*Colonna.*	*Errori.*	*Correzioni.*
35	7 giugno	6	8,76	9,76
	7	4	251	261
42	9 dicembre	3	193	93
			295	95
			210	110
43	23	2	12 8	12 6
45	29	5	56′	59′
	31	2	165	163
	9 giugno	1	luglio	si cancelli
47		5	253°	225°
51	28	5	183°	185
52	4 luglio	6	10,00	27 10,00
	5	6	10,66	27 10,66
53	9 dicembre	2	59 27	59 20
56	6 giugno	1	6	6 giugno
57	9	5	270 6	270 0

POSIZIONI DI URANO DI DODICI IN DODICI GIORNI A 12h DI TEMPO MEDIO.

		Longitudine.	Latitudine.	Ascensione retta.	Declinazione.	Nascere.	Passaggio pel merid.	Tramontare.
		° ′	° ′	h ′	° ′	h ′	h ′	h ′
Gennajo	1	0 6 28	0 42A	0 25	1 56B	23 29	5 40	11 51
	13	0 6 43	0 42	0 26	2 2	22 42	4 53	11 4
	25	0 7 4	0 41	0 27	2 10	21 55	4 7	10 19
Febbrajo	6	0 7 31	0 41	0 29	2 22	21 9	3 22	9 33
	18	0 8 3	0 40	0 31	2 35	20 22	2 36	8 50
Marzo	2	0 8 40	0 40	0 33	2 49	19 37	1 51	8 5
	14	0 9 19	0 40	0 35	3 5	18 51	1 6	7 21
	26	0 10 0	0 39	0 38	3 21	18 4	0 21	6 38
Aprile	7	0 10 42	0 39	0 40	3 37	17 19	23 37	5 55
	19	0 11 20	0 40	0 43	3 53	16 33	22 52	5 11
Maggio	1	0 11 57	0 40	0 45	4 8	15 47	22 7	4 27
	13	0 12 33	0 40	0 47	4 22	15 1	21 22	3 43
	25	0 13 5	0 40	0 49	4 34	14 14	20 36	2 58
Giugno	6	0 13 31	0 40	0 51	4 44	13 28	19 51	2 13
	18	0 13 52	0 41	0 52	4 52	12 42	19 5	1 28
	30	0 14 7	0 41	0 53	4 57	11 54	18 18	0 42
Luglio	12	0 14 14	0 41	0 54	4 59	11 8	17 32	23 56
	24	0 14 14	0 41	0 54	4 59	10 20	16 44	23 8
Agosto	5	0 14 8	0 42	0 53	4 57	9 33	15 57	22 20
	17	0 13 56	0 42	0 53	4 52	8 46	15 9	21 32
	29	0 13 37	0 42	0 51	4 44	7 58	14 20	20 43
Settem.	10	0 13 14	0 42	0 50	4 34	7 9	13 31	19 53
	22	0 12 47	0 43	0 48	4 24	6 22	12 43	19 4
Ottobre	4	0 12 18	0 43	0 46	4 13	5 34	11 54	18 14
	16	0 11 50	0 43	0 44	4 1	4 45	11 4	17 25
	28	0 11 24	0 43	0 43	3 51	3 56	10 15	16 34
Novem.	9	0 11 59	0 42	0 42	3 42	3 9	9 27	15 45
	21	0 10 40	0 42	0 40	3 35	2 20	8 38	14 56
Dicem.	3	0 10 28	0 42	0 39	3 30	1 33	7 50	14 7
	15	0 10 22	0 41	0 39	3 28	0 45	7 2	13 19
	27	0 10 21	0 41	0 39	3 29	23 58	6 15	12 32

Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Gennaio	
1	♂ in ♋.
3	☿ nella massima lat. B.
7	☿ in ♋.
8	☿ nel massimo splendore.
12	☾ apogea.
18	☿ nella massima elong. occ.
19	☉ entra in ♒ a 21ʰ 43′.
21	♃ in quadratura col ☉.
26	☾ perigea.
26	☿ in ♑.
Febbrajo	
5	☿ nell' afelio.
8	☾ apogea.
10	♀ nel perielio.
18	☉ entra in ♓ a 12ʰ 24′.
18	Occultaz. di 8 β ♏ prec. 2.ª
24	☾ perigea.
26	☿ nella massima lat. A.
Marzo	
2	♀ ☌ inf. ☉.
4	☿ nella massima lat. B.
5	☿ ☌ inf. ☉.
8	☾ apogea.
17	☿ in ♋.
20	☉ entra in ♈ a 12ʰ 23′.
21	☿ nel perielio.
24	☾ perigea.
30	☿ nella mass. elong. orient.
30	♅ ☌ ☉.

Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Aprile	
1	☿ nella massima lat. B.
5	☾ apogea.
18	☿ ☌ inf. ☉.
20	☉ entra in ♉ a 0ʰ 32′.
20	☾ perigea.
24	☿ in ♑.
25	Eclisse parziale di Sole.
29	♀ in ♑.
Maggio	
1	♃ ☌ ☉.
2	☾ apogea.
4	☿ nell' afelio.
10	☿ nella mass. elongaz. occid.
11	Occultaz. di β ♏ prec. 2.ª
14	♃ ☌ ☉.
15	☾ perigea.
16	☿ nella mass. elong. occid.
21	☉ entra in ♊ a 0ʰ 38′.
21	♄ in quadratura col ☉.
25	☿ nella massima lat. A.
30	☾ apogea.
Giugno	
2	♀ nell' afelio.
11	☾ perigea.
13	☿ in ♋.
17	☿ nel perielio.
20	☿ ☌ inf. ☉.
21	☉ entra in ♋ a 9ʰ 7′.
25	♀ nella massima lat. A.
27	☾ apogea.
28	☿ nella massima lat. B.

Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Luglio 2	Occultaz. di α ♍ (Spica) 1.ª
6	♅ in quadratura col ☉.
9	☾ perigea.
21	☿ in ♋.
22	☉ entra in ♌ a 19ʰ 59′.
24	☾ apogea.
28	☿ nella mass. elong. orient.
31	☿ nell' afelio.
Agosto 7	☾ perigea.
8	♂ nell' afelio.
20	♄ ☌ ☉.
20	☿ in ♋.
21	☾ apogea.
21	☿ nella massima lat. A.
23	☉ entra in ♍ a 2ʰ 28′.
25	☿ ☍ inf. ☉.
Settembre 4	☾ perigea.
8	♃ in quadratura col ☉.
9	☿ in ♋.
9	♂ ☍ ☉.
10	☿ nella massima elong. occid.
13	☿ nel perielio.
17	☾ apogea.
22	☉ entra in ♎ a 23ʰ 8′.
23	♀ nel perielio.
24	☿ nella massima latitud. B.
28	♀ ☌ ☉.

Giorni.	Fenomeni ed osservazioni.
Ottobre 2	☾ perigea.
5	♅ ☌ ☉.
7	☿ ☍ inf. ☉.
14	☾ apogea.
15	☿ nella massima lat. B.
17	☿ in ♋.
23	☉ entra in ♏ a 7ʰ 23′.
27	☿ nell' afelio.
30	☾ perigea.
Novembre 11	☾ apogea.
16	♄ in quadratura col ☉.
17	☿ nella massima lat. A.
19	♀ ☌ ☉.
22	☉ entra in ♐ a 4ʰ 1′.
22	☿ nella mass. elong. orient.
25	☾ perigea.
Dicembre 3	♃ ☌ ☉.
6	☿ in ♋.
9	☾ apogea.
10	☿ in ♋.
10	☿ nel perielio.
11	☿ ☍ inf. ☉.
15	♀ ☍ sup. ☉.
17	Occultazione di ☿.
21	☿ nella massima lat. B.
21	☉ entra in ♑ a 16ʰ 50′.
21	☾ perigea.
31	☿ nella massima elong. occid.
31	♅ in quadratura col ☉.

APPENDICE

ALLE EFFEMERIDI

DELL' ANNO 1846.

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1842	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
30 Dicembre	18 28 0	167	273,5	271 29 37,99	pell. lin.
	28 40	169	275		28 0,20
	29 20				
	30 0			185 58 24,48	
	31 20				Term. interno + 5,6
	32 0				
	32 40			100 27 1,86	
	33 20				
	34 40	169,5	274,5		Term. esterno + 5,6
	35 20	171	276,5	14 57 19,08	
	36 0				
	36 40				
mezzodì vero	18 31 0				
31 Dicembre	18 32 0	168	267	14 57 18,67	Barom. 27 10,10
	32 40	177	275		
	33 20				
	34 0			289 9 51,34	Term. interno + 7,0
	35 20				
	36 0				
	36 40			203 21 55,66	
	37 20				
	38 40	170	266,5		Term. esterno + 8,3
	39 20	178,5	275	117 35 37,99	
	40 0				
	40 40				
mezzodì vero	18 35 8				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1843	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
1 Gennajo	18 37 0	178	261,5	117 35 34,75	pell. lin.
	37 40	181	264		27 5,23
	38 20				
	39 0				
				31 30 2,43	Term. interno
	40 20				+ 8,9
	41 0				
	41 40			305 24 33,75	
	42 20				
					Term. esterno
	43 40	180	262		+ 10,3
	44 20	183	265,5	219 21 14,26	
	45 0				
	45 40				
mezzodì vero	18 39 15				
2 Gennajo	18 41 0	172,5	267	219 21 15,48	Barom.
	41 40	175	270		27 5,75
	42 20				
	43 0				
				132 55 22,07	Term. interno
	44 20				+ 6,5
	45 0				
	45 40			46 29 31,92	
	46 20				
					Term. esterno
	47 40	173,5	269,5		+ 6,4
	48 20	175,5	271,5	320 5 51,36	
	49 0				
	49 40				
mezzodì vero	18 43 24				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
1842					pell. lin.
30 Dicembre	18 28 0	167	273,5	271 29 37,99	28 0,20
	28 40	169	275		
	29 20				
	30 0				
				185 58 24,48	
	31 20				Term. interno
	32 0				+ 5,6
	32 40				
	33 20			100 27 1,86	
					Term. esterno
	34 40	169,5	274,5		+ 5,6
	35 20	171	276,5	14 57 19,08	
	36 0				
	36 40				
mezzodì vero	18 31 0				
31 Dicembre	18 32 0	168	267	14 57 18,67	Barom.
	32 40	177	275		27 10,10
	33 20				
	34 0				
				289 9 51,34	
	35 20				Term. interno
	36 0				+ 7,0
	36 40				
	37 20			203 21 55,66	
					Term. esterno
	38 40	170	266,5		+ 8,3
	39 20	178,5	275	117 35 37,99	
	40 0				
	40 40				
mezzodì vero	18 35 8				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1843	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
1 Gennajo	18 37 0	178	261,5	117 35 34,75	pol. lin.
	37 40	181	264		27 5,23
	38 20				
	39 0			31 30 2,43	
	40 20				Term. interno
	41 0				+ 8,9
	41 40			305 24 33,75	
	42 20				
	43 40	180	262		Term. esterno
	44 20	183	265,5	219 21 14,26	+ 10,3
	45 0				
	45 40				
mezzodì vero	18 39 15				
2 Gennajo	18 41 0	172,5	267	219 21 15,48	Barom.
	41 40	175	270		27 5,75
	42 20				
	43 0			132 55 22,07	
	44 20				Term. interno
	45 0				+ 6,5
	45 40				
	46 20			46 29 31,92	
	47 40	173,5	269,5		Term. esterno
	48 20	175,5	271,5	320 5 51,36	+ 6,4
	49 0				
	49 40				
mezzodì vero	18 43 24				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	
1843 3 Gennajo	18 47 0	166	278	320 5 50,55	Barom. pell. lin. 27 8,20
	47 40	163	275		
	48 20				
	49 0			233 17 43,06	
	50 0				Term. interno + 4,8
	50 40				
	51 20			146 30 24,00	
	52 0				
	53 0	168	279		Term. esterno + 4,5
	53 40	165	276	59 45 54,22	
	54 20				
	55 0				
mezzodì vero	18 47 33				
4 Gennajo	18 51 0	167,5	285	59 45 55,03	Barom. 27 11,98
	51 30	157	274,5		
	52 0				
	52 30			333 33 54,67	
	53 30				Term. interno + 3,3
	54 0				
	54 30			245 22 20,23	
	55 0				
	56 0	168	283,5		Term. esterno + 5,05
	56 30	160,5	276,5	158 12 22,99	
	57 0				
	57 30				
mezzodì vero	18 51 42				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	
1843					Barom.
21 Giugno	5 9 0	171	295	45 17 44,34	poll. lin.
	9 40	150	273		27 8,30
	10 20	172	294		
	11 0	151	273		Term. interno
				135 10 53,26	+ 19,0
					Term. esterno
					+ 20,0
mezzodì vero	5 8 48				
11	5 13 10	164	293	148 53 53,79	Barom.
	14 20	147	281		27 7,30
	15 0	160	293		
	15 40	148	281,5		Term. interno
				238 28 46,29	+ 17,5
					Term. esterno
					+ 18,5
mezzodì vero	5 12 53				
12	5 15 0	155	283	238 28 43,86	Barom.
	15 40	161	288		27 6,00
	16 20				
	17 0				Term. interno
	19 0	154	280,5	327 46 1,83	+ 18,0
	19 40	163	289		
	20 20				Term. esterno
	21 0			57 5 3,83	+ 19,1
mezzodì vero	5 16 59				
14	5 23 7	154	295	72 0 15,39	Barom.
	23 40	153	294,5		27 8,4
	24 20				
	25 0				Term. interno
	27 0	151,5	292	160 49 20,86	+ 16,9
	27 40	153	293		
	28 20				Term. esterno
	29 0				+ 18,9
				249 39 46,93	
mezzodì vero	5 28 10				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	
1843 27 Giugno	6 15 0	128	309	137 41 0,87	Barom. pell. lin. 27 7,87
	15 40	132	312,5		
	16 20				Term. interno + 18,1
	17 0				
	19 0	127	307	226 6 29,65	
	19 40	126,5	307		Term. esterno + 18,35
	20 20				
	21 0			314 31 7,00	
mezzodì vero	6 18 31				
30	6 32 40	120	316	314 31 2,14	Barom. 27 8,70
	33 20	115,5	311,5		
	34 0				Term. interno + 17,2
	34 40				
		120	316	43 30 51,57	
		117	313		Term. esterno + 18,8
mezzodì vero	6 30 49				
1 Luglio	6 32 0	117	317,5	55 32 50,77	Barom. 27 10,00
	32 40	118	318		
	33 20				Term. interno + 18,8
	34 0				
	36 0	113	314	144 46 15,46	
	36 40	116	317		Term. esterno + 20,0
	37 20				
	38 0			233 59 43,80	
mezzodì vero	6 34 53				
2	6 36 0	106,5	326,5	233 59 43,80	Barom. 27 10,90
	36 40	102	323		
	37 20				Term. interno + 19,4
	38 0				
	40 0	104	327	323 29 23,32	
	40 40	102	325,5		Term. esterno + 20,45
	41 20				
	42 0			52 58 55,56	
mezzodì vero	6 38 59				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1843	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
3 Luglio	6 40 0	92	339	134 3 43,92	pell. lin.
	40 40	94	341,5		27 9,98
	41 20				
	42 0				
	45 0	90	336,5	223 50 57,25	Term. interno
	45 40	94	341		+ 20,5
	46 20				
	47 0				
				313 39 21,06	Term. esterno
mezzodì vero	6 43 3				+ 22,5
4	6 44 40	90	339	313 39 15,79	Barom.
	45 20	91	340,5		27 10,60
	46 0				
	46 40				
	48 40	88	339	43 45 26,37	Term. interno
	49 20	91,5	342,5		+ 22,5
	50 0				
	50 40				
				133 52 39,72	Term. esterno
mezzodì vero	6 47 8				+ 23,9

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ' "	mm	mm	° ' "	
1843 5 Dicembre	16 41 0	140	290	270 0 3,24	Barom. pell. lin. 27 11,75
	41 40	135,5	285,5		
	42 20				
	43 0			181 5 38,22	
	45 20				Term. interno + 4,2
	46 0				
	47 0				
	47 40			92 11 16,03	
	50 40	138	285		Term. esterno + 6,25
	51 20	144	292	5 21 13,45	
	52 0				
	52 40				
mezzodì vero	16 44 42				
6	16 44 0	134	282	270 0 4,05	Barom. 27 10,62
	44 40	144	292		
	45 40				
	46 40			181 36 41,22	
	49 40				Term. interno + 5,0
	50 20				
	51 0				
	51 40			93 12 30,19	
	53 40	139	281		Term. esterno + 8,0
	54 20	142	285,5	4 51 15,25	
	55 20				
	56 0				
mezzodì vero	16 48 59				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1843	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
7 Dicembre	16 49 0	141,5	282	4 51 15,34	pell. lin.
	49 40	141,5	281		27 11,39
	50 20				
	51 0				
				276 56 6,22	
	53 0				Term. interno
	53 40				+ 6,0
	54 20				
	55 0			189 0 8,10	
	57 0	144	279		Term. esterno
	57 40	144	280		+ 7,1
	58 20			101 6 8,23	
	59 0				
mezzodì vero	16 53 16				
8	16 52 0	144	283	101 6 6,21	Barom.
	52 40	142	281		27 10,1
	53 20				
	54 0				
				13 38 41,64	
	56 0				Term. interno
	56 40				+ 5,2
	57 20				
	58 0			286 9 28,93	
	17 0 0	144	280		Term. esterno
	0 40	144	281,5		+ 6,8
	1 20			198 41 15,76	
	2 0				
mezzodì vero	16 57 33				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	
1843 9 Dicembre	16 56 0	147	281	198 42 47,29	Barom. poll. lin. 27 8,6
	56 40	148	281		
	57 20				
	58 0			111 40 38,23	Term. interno + 7,0
	17 0 0				
	0 40				
	1 20			24 36 32,53	
	2 0				Term. esterno + 10,0
	4 0	148	278		
	4 40	149	279	297 33 23,53	
	5 20				
	6 0				
mezzodì vero	17 1 51				
16	17 29 0	140	290	297 33 22,72	Barom. 27 11,1
	29 40	137	287		
	30 20				
	31 0			212 33 47,25	Term. interno + 4,4
	33 0				
	33 40				
	34 20			127 33 4,54	
	35 0				Term. esterno + 8,4
	37 0	141	286,5		
	37 40	140	285,5	42 34 18,88	
	38 20				
	39 0				
mezzodì vero	17 33 25				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	
1843 17 Dicembre	17 33 0	135	286	42 34 20,10	Barom. poll. lin. 27 11,22
	33 40	139	289,5		
	34 20				
	35 0			317 45 3,06	
	37 0				Term. interno + 4,8
	37 40				
	38 20			232 54 37,98	
	39 0				
	41 0	138	285,5		Term. esterno + 5,6
	41 40	141	289	148 5 56,98	
	42 20				
	43 0				
mezzodì vero	17 37 46				
24	18 4 0	126	302	148 5 59,82	Barom. 28 1,8
	4 40	125	301,5		
	5 20				
	6 0			63 35 48,12	
	8 0				Term. interno + 1,0
	8 40				
	9 20			339 4 34,86	
	10 0				
	12 0	132	303		Term. esterno + 2,0
	12 40	128	299,5	254 35 24,72	
	13 20				
	14 0				
mezzodì vero	18 8 21				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	
1843 9 Dicembre	16 56 0	147	281	198 42 47,29	Barom. poll. lin. 27 8,6
	56 40	148	281		
	57 20				
	58 0			111 40 38,23	Term. interno + 7,0
	17 0 0				
	0 40				
	1 20			24 36 32,53	
	2 0				Term. esterno + 10,0
	4 0	148	278		
	4 40	149	279	297 33 23,53	
	5 20				
	6 0				
mezzodì vero	17 1 51				
16	17 29 0	140	290	297 33 22,72	Barom. 27 11,1
	29 40	137	287		
	30 20				
	31 0			212 33 47,25	Term. interno + 4,4
	33 0				
	33 40				
	34 20			127 33 4,54	
	35 0				Term. esterno + 8,4
	37 0	141	286,5		
	37 40	140	285,5	42 34 18,88	
	38 20				
	39 0				
mezzodì vero	17 33 25				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1843	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
17 Dicembre	17 33 0	135	286	42 34 20,10	poll. lin.
	33 40	139	289,5		27 11,22
	34 20				
	35 0			317 45 3,06	
	37 0				Term. interno
	37 40				+ 4,8
	38 20			232 54 37,98	
	39 0				
	41 0	138	285,5		Term. esterno
	41 40	141	289	148 5 56,98	+ 5,6
	42 20				
	43 0				
mezzodì vero	17 37 46				
24	18 4 0	126	302	148 5 59,82	Barom.
	4 40	125	301,5		28 1,8
	5 20				
	6 0			63 35 48,12	
	8 0				Term. interno
	8 40				+ 1,0
	9 20			339 4 34,86	
	10 0				
	12 0	132	303		Term. esterno
	12 40	128	299,5	254 35 24,72	+ 2,0
	13 20				
	14 0				
mezzodì vero	18 8 21				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1845	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
25 Dicembre	18 8 0	131	298,5	254 35 24,72	pull. lin.
	8 40	130,5	299		28 1,95
	9 20				
	10 0			170 0 46,53	
	12 0				Term. interno
	12 40				+ 1,3
	13 20			85 24 55,44	
	14 0				
	16 0	134	297		Term. esterno
	16 40	131	295	0 50 51,27	+ 3,95
	17 20				
	18 0				
mezzodì vero	18 12 42				
26	18 14 0	128,5	299,5	0 50 52,89	Barom.
	14 40	126	297		28 2,66
	15 20				
	16 0			276 8 25,30	
	17 40				Term. interno
	18 20				+ 1,9
	19 0			191 25 55,26	
	19 40				
	21 20	132	300		Term. esterno
	22 0	128	297	106 45 35,66	+ 3,1
	22 40				
	23 20				
mezzodì vero	18 17 5				

Giorni.	Tempi dell' orológio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1845	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
27 Dicembre	18 18 0	133	298,5	106 45 34,06	poll. lin.
	18 40	127	292,5		28 1,96
	19 20				
	20 0			21 54 58,05	
	22 0				Term. interno
	22 40				+ 2,5
	23 20				
	24 0			297 3 58,14	
	25 40	135,5	298		Term. esterno
	26 20	129	292		+ 3,7
	27 0			212 15 15,12	
	27 40				
mezzodì vero	18 21 26				
28	18 22 40	138	295	212 15 13,50	Barom.
	23 20	132	288		28 1,40
	24 0				
	24 40			127 14 12,57	
	27 0				Term. interno
	27 40				+ 3,7
	28 20				
	29 0			42 13 12,04	
	30 40	141	295		Term. esterno
	31 20	133	287,5	317 15 7,69	+ 5,5
	32 0				
	32 40				
mezzodì vero	18 25 47				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1843	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
29 Dicembre	18 28 40	142,5	291,5	317 15 6,07	pell. lin.
	29 20	132	281		28 1,42
	30 0				
	30 40				Term. interno
	32 20	145	291	232 1 34,68	+ 4,5
	33 0	136,5	283,5		
	33 40				Term. esterno
	34 20			146 48 55,93	+ 6,8
mezzodì vero	18 30 8				
30	18 30 0	135	291	146 48 53,50	Barom.
	30 40	133	289		28 1,20
	31 20				
	32 0				
	34 0			61 22 11,55	Term. interno
	34 40				+ 3,8
	35 20				
	36 0			335 54 32,89	
	38 0	138	290,5		
	38 40	136	289		Term. esterno
	39 20				+ 4,2
	40 0			250 28 32,25	
mezzodì vero	18 34 29				
31	18 34 0	135	291	250 28 34,27	Barom.
	34 40	133	289		27 11,65
	35 20				
	36 0				
	38 0			164 46 9,48	Term. interno
	38 40				+ 3,1
	39 20				
	40 0			79 2 26,11	
	42 0	140	293		
	42 40	136	289,5		Term. esterno
	43 20			353 20 11,85	+ 5,3
	44 0				
mezzodì vero	18 38 49				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1844	h ' "	mm	mm	° ' "	Barom.
1 Gennajo	18 38 40	126	291	353 20 13,47	poll. lin.
	39 20	136,5	301,5		27 9,76
	40 0				
	40 40			267 19 35,58	
	42 40				Term. interno
	43 20				+ 3,1
	44 0			181 17 56,13	
	44 40				
	46 20	129	290,5		Term. esterno
	47 0	138,5	300	95 17 31,60	+ 3,6
	47 40				
	48 20				
mezzodì vero	18 43 10				
3	18 48 0	135	284	95 17 39,39	Barom.
	48 40	140	292		27 6,64
	49 20				
	50 0			8 35 52,12	
	52 0				Term. interno
	52 40				+ 4,0
	53 20			281 53 39,84	
	54 0				
	56 0	137	285		Term. esterno
	56 40	138	287,5	195 13 25,81	+ 5,4
	57 20				
	58 0				
mezzodì vero	18 51 51				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ' "	mm	mm	° ' "	
1844 8 Giugno	5 5 0	143	275	0 0 4,05	Barom. pol. lin. 28 0,0
	5 40	154	287		
	6 20				
	7 0				Term. interno + 21,6
	9 0	142	274	90 18 11,07	
	9 40	150	282		
	10 20				Term. esterno + 23,6
	11 0			180 36 35,10	
mezzodì vero	5 7 53				
9	5 9 0	135	295	0 0 7,29	Barom. 27 11,65
	9 40	134,5	295		
	10 20				
	11 0				Term. interno 21,1
	13 0	135	293,5	89 50 8,22	
	13 40	138	297		
	14 20				Term. esterno 23,1
	15 0			179 56 14,01	
mezzodì vero	5 11 58				
10	5 13 0	129	301	325 2 11,26	Barom. 27 11,39
	13 40	130	302		
	14 20				
	15 0				Term. interno 20,8
	17 0	132	301,5	54 41 35,61	
	17 40	128,5	299		
	18 20				Term. esterno 21,9
	19 0			144 20 53,07	
mezzodì vero	5 16 5				
11	5 18 0	125	295	49 28 12,27	Barom. 27 11,57
	18 40	135	307		
	19 20				
	20 0				Term. interno 21,1
	21 40	125	297	138 49 39,72	
	22 20	135	306,5		
	23 0				Term. esterno 22,2
	23 40			228 12 7,51	
mezzodì vero	5 20 12				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1844	h ′ ″	mm.	mm.	° ′ ″	Barom.
12 Giugno	5 22 0	131	310,5	171 32 44,68	pell. lin.
	22 40	124	304		27 11,45
	23 20				
	24 0				Term. interno
	26 0	133	312	260 39 17,46	21,9
	26 40	122	301		
	27 20				Term. esterno
	28 0				23,4
mezzodì vero	5 24 19			349 46 59,92	
13	26 0	119	311	69 17 19,09	Barom.
	26 40	123,5	315,5		27 11,68
	27 20				
	28 0				Term. interno
	5 30 0	115	308	158 9 53,14	22,7
	30 40	125	316		
	31 20				Term. esterno
	32 0				24,8
mezzodì vero	5 28 24			247 3 22,27	
14	30 0	123	313	78 11 24,31	Barom.
	30 40	125	326		27 10,82
	31 20				
	32 0				Term. interno
	34 0	111	311	166 51 54,20	23,6
	34 40	125	325		
	35 20				Term. esterno
	36 0				25,95
mezzodì vero	5 32 32			255 32 58,96	
15	5 34 0	104	310,5	223 29 30,16	Barom.
	34 40	115,5	331,5		27 9,73
	35 20				
	36 0				Term. interno
	38 0	107	319,5	311 59 34,75	23,1
	38 40	117	330		
	39 20				Term. esterno
	40 0				25,8
mezzodì vero	5 36 41			40 29 54,73	

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bella.		Archi letti.	Barometro e termometro.
1844	h. ′ ″	mm	mm	° ′ ″	Barom.
16 Giugno	5 38 0	106	328,5	38 39 40,05	pell. lin.
	38 40	112	334		27 8,50
	39 20				
	40 0				Term. interno
	42 0	105	327	77 9 49,23	23,0
	42 40	111	333		
	43 20				Term. esterno
	44 0				25,2
				165 22 19,06	
mezzodì vero	5 40 49				
17	5 42 0	105	350	53 9 41,13	Barom.
	42 40	107	351		27 10,15
	43 30				
	44 0				Term. interno
	46 0	105,5	346,5	141 23 45,06	22,3
	46 40	108,5	348		
	47 20				Term. esterno
	48 0				22,5
				229 37 55,87	
mezzodì vero	5 44 58				
18	5 46 0	161	279	229 38 1,14	Barom.
	46 40	162	281		27 9,27
	47 20				
	48 0				Term. interno
	50 0	160	277,5	317 46 37,02	22,1
	50 40	163	280,5		
	51 20				Term. esterno
	52 0				22,95
				45 55 0,75	
mezzodì vero	5 49 6				
20	5 54 0	158,5	295	170 16 14,79	Barom.
	54 40	144	280,5		27 9,60
	55 20				
	56 0				Term. interno
	58 0	160	295	258 19 18,97	19,5
	58 40	145	280,5		
	59 20				Term. esterno
	6 0 0				20,0
				346 21 43,87	
mezzodì vero	5 57 24				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	
1844 21 Giugno	5 59 40	154	286,5	66 31 5,16	Barom. pell. lin. 27 11,40
	6 0 20	138	271		
	1 0				Term. interno 20,5
	1 40				
	3 40	155	285	154 32 11,89	
	4 20	140	271		Term. esterno 21,8
	5 0				
	5 40			242 35 22,15	
mezzodì vero	6 1 32				
22	6 3 0	148	274	105 45 40,90	Barom. 27 11,00
	3 40	150	276,5		
	4 20				Term. interno 21,5
	5 0				
	7 0	150	273,5	193 48 6,21	
	7 40	151,5	276		Term. esterno 22,9
	8 20				
	9 0			281 51 2,29	
mezzodì vero	6 5 40				
23	6 7 0	145	278	143 54 55,44	Barom. 27 10,53
	7 40	145	278		
	8 20				Term. interno 21,2
	9 0				
	12 0	149	279,5	232 0 22,18	
	12 40	147	278		Term. esterno 21,2
	13 20				
	14 0			320 7 0,21	
mezzodì vero	6 9 48				
24	6 11 40	145	283,5	319 2 37,32	Barom. 27 9,75
	12 20	142	281		
	13 0				Term. interno 20,5
	13 40				
	15 20	143,5	280	47 11 39,52	
	16 0	144	281		Term. esterno 21,3
	16 40				
	17 20			135 21 56,25	
mezzodì vero	6 13 55				

Giorni.	Tempi dell' orologio.	Estremi della bolla.		Archi letti.	Barometro e termometro.
	h ′ ″	mm	mm	° ′ ″	
1844 4 Luglio	6 52 0	187	287	19 4 54,48	Barom. poll. lin. 27 8,85
	52 40	138	278		
	53 20				
	54 0				Term. interno 21,5
	56 0	147	285,5	199 27 33,25	
	56 40	139	278		
	57 20				Term. esterno 23,2
	58 0				
mezzodì vero	6 55 0			199 50 26,61	

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		mm	″	″	″
1837 Dicembre	14	− 8,10	25,92	+ 9,5	0,381	− 33,80	+ 3,62
		+ 7,32	19,02	+ 16,5	0,385	− 26,77	+ 6,34
	15	−12,03	40,11	+ 7,0	0,384	− 52,59	+ 2,69
		+ 2,53	4,39	− 50,5	0,383	− 6,24	−19,32
	16	−12,50	43,25	+ 8,0	0,653	− 56,97	+ 5,22
		+ 4,80	9,42	+ 3,0	0,652	− 13,22	+ 1,96
	17	−12,73	44,60	− 6,0	0,626	− 58,98	− 7,60
		+ 0,02	7,87	− 6,0	0,627	− 10,61	− 7,60
	18	−12,13	40,43	− 16,5	0,613	− 53,63	−10,10
		+ 3,20	6,02	− 12,5	0,618	− 8,33	− 7,73
	19	−16,05	70,44	− 13,5	0,625	− 94,07	− 8,44
		+ 0,62	3,10	− 13,0	0,638	− 4,80	− 8,30
1838 Gennajo	22	−13,70	50,00	+ 9,0	0,643	− 67,45	+ 5,78
		+ 1,88	3,90	+ 12,0	0,646	− 5,24	+ 7,75
	1	− 9,65	27,13	+ 9,0	0,606	− 38,73	+ 5,45
		+ 6,10	12,52	+ 8,0	0,610	− 15,71	+ 4,88
	9	−10,03	29,69	+ 6,0	0,591	− 44,38	+ 3,55
		+ 6,88	16,19	+ 2,0	0,597	− 19,80	+ 1,19
	11	−14,37	55,25	+ 38,0	0,580	− 81,73	+22,04
		+ 1,13	3,52	+ 38,5	0,581	− 4,41	+22,37
1838 Giugno	7	+ 4,38	12,22	− 1,0	0,553	− 39,10	− 0,55
		+19,72	99,25	− 7,0	0,557	−319,70	− 3,90
	8	+ 6,52	13,24	− 4,7	0,568	− 41,95	− 2,67
		....	....	....	....	.....	....
	9	− 3,52	5,84	+ 10,0	0,539	− 19,97	+ 5,40
		+13,32	48,18	+ 15,0	0,543	−155,72	+ 8,15
	10	+ 0,05	4,50	+ 14,5	0,555	− 14,84	+ 8,04
		+13,80	50,19	+ 11,0	0,556	−162,92	+ 6,11
	13	+12,92	123,58	+ 2,7	0,535	−400,50	+ 1,44
		....	....	....	....	.....	....

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		″	″	″	″
1818 Giugno	14	+ 6,43	10,32	+ 3,0	0,539	− 33,67	+ 1,62
		. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .
	15	+ 6,50	24,59	+ 1,5	0,557	− 81,31	+ 0,83
		. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .
	18	− 6,05	11,32	+ 18,0	0,586	− 88,26	+10,54
		+ 7,53	16,76	+ 16,5	0,591	− 55,66	+ 9,75
	19	+ 3,13	5,56	− 27,0	0,579	− 18,54	−15,64
		+16,03	66,07	− 26,5	0,577	−220,69	−15,28
	20	+ 1,55	3,00	+ 5,0	0,566	− 10,01	− 2,83
		+13,05	44,65	+ 10,5	0,555	−149.34	− 5,82
	21	− 7,37	19,95	+ 8,0	0,572	− 66,96	+ 4,57
		+ 8,97	23,06	0,0	0,577	− 77,25	0,00
	22	− 9,32	24,98	− 10,0	0,595	− 88,68	+ 5,95
		+ 5,13	9,95	+ 14,0	0,595	− 83,40	− 8,32
	23	− 0,25	1,86	− 4,0	0,614	− 6,22	+ 2,46
		+11,92	37,67	− 2,0	0,619	−125,96	− 1,24
	24	− 3,52	4,73	+ 14,5	0,599	− 16,70	+ 8,67
		+ 8,07	18,16	+ 17,5	0,601	− 61,19	+10,52
	25	− 0,45	4,72	+ 21,0	0,607	− 16,41	+12,74
		+16,90	73,29	+ 17,0	0,609	−246,40	+10,35
	26	− 2,98	4,06	+ 17,0	0,607	− 13,85	+10,30
		+ 8,43	19,47	+ 19,0	0,607	− 65,78	+11,54
	27	+ 0,43	2,49	+ 25,5	0,604	− 8,36	+15,42
		+12,18	39,18	+ 21,5	0,604	−132,03	+12,97
	28	− 6,58	10,19	− 2,0	0,607	− 33,25	− 1,21
		+ 7,58	16,67	+ 5,5	0,609	− 56,46	+ 3,33
	29	−10,12	29,73	+ 4,5	0,586	− 97,69	+ 2,64
		+ 5,43	10,76	0,0	0,589	− 36,63	0,00
Luglio	3	+ 1,77	3,73	+ 12,5	0,563	− 12,66	− 7,36
		+14,52	55,20	− 7,5	0,562	−184,98	− 4,22
	4	− 9,78	26,58	+ 4,0	0,553	− 85,36	+ 2,21
		+ 4,30	7,43	+ 4,5	0,555	− 25,37	+ 1,58

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		ms	″	″	″
1838 Lug.	5	−11,67	38,22	+ 14,0	0,562	−122,67	+ 7,87
		+ 2,83	5,23	+ 4,0	0,563	− 17,80	+ 2,25
	10	− 8,20	21,56	+ 3,5	0,515	− 27,38	− 1,80
		+ 8,88	23,13	+ 17,0	0,521	− 38,41	− 8,86
	11	− 6,80	15,05	+ 11,5	0,501	− 18,57	+ 5,76
		+11,53	37,32	− 11,0	0,504	− 52,99	− 5,54
1838 Dicembre	12	+ 2,13	5,54	+ 9,0	0,490	− 7,90	+ 4,41
		+21,13	120,20	+ 11,0	0,493	−166,71	+ 5,42
	13	+ 9,05	24,76	+ 5,5	0,493	− 35,03	+ 2,71
	14	− 9,27	26,68	+ 28,5	0,487	− 34,65	−13,88
		+ 8,22	17,08	− 30,0	0,490	− 24,32	−14,70
	16	− 5,18	12,33	+ 1,5	0,484	− 15,67	+ 0,73
		+11,32	34,90	+ 13,6	0,487	− 48,35	+ 6,57
	17	− 6,50	13,92	+ 2,5	0,484	− 18,15	+ 1,21
		+ 9,00	23,32	+ 5,0	0,487	− 32,28	+ 2,43
	19	− 3,07	5,85	+ 7,0	0,487	− 7,71	+ 3,41
		+13,60	49,07	+ 16,0	0,490	− 66,83	+ 7,84
	20	+11,30	35,84	+ 9,0	0,487	− 48,65	+ 4,38
	22	−15,83	66,56	+ 4,5	0,470	− 89,68	+ 2,11
		+ 0,50	3,14	+ 5,0	0,473	− 4,23	+ 2,36
	31	−34,02	146,57	+ 4,5	0,501	−202,62	+ 2,25
		−10,43	29,68	+ 7,5	0,503	− 42,03	+ 3,87
1839	1	−38,38	204,52	+ 2,0	0,500	−282,63	+ 1,00
		−18,88	51,47	+ 7,5	0,503	− 72,47	+ 3,87
Gennaio	3	−81,35	250,48	+ 6,0	0,528	−347,61	+ 3,17
		−16,02	67,83	+ 9,0	0,531	− 95,91	+ 4,78
	4	+ 2,60	47,81	+ 11,5	0,512	− 64,33	+ 5,89
		+44,23	523,48	+ 19,0	0,513	−710,56	+ 9,75
	6	+ 4,03	6,53	− 9,0	0,499	− 7,72	− 4,49
		+17,96	82,96	− 8,0	0,501	−107,85	− 4,01

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		ma	″	″	″
1818 Giugno	14	+ 6,43	10,32	+ 3,0	0,539	− 33,67	+ 1,62
		. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .
	15	+ 6,50	24,89	+ 1,5	0,557	− 81,31	+ 0,83
		. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .
	18	− 6,05	11,32	+ 18,0	0,586	− 88,26	+10,54
		+ 7,53	16,76	+ 16,5	0,591	− 55,66	+ 9,75
	19	+ 3,13	5,56	− 27,0	0,579	− 18,54	−15,64
		+16,03	66,07	− 26,5	0,577	−220,69	−15,28
	20	+ 1,55	3,00	+ 5,0	0,566	− 10,01	− 2,83
		+13,05	44,65	+ 10,5	0,555	−149.34	− 5,82
	21	− 7,37	19,95	+ 8,0	0,572	− 66,96	+ 4,57
		+ 8,97	23,06	0,0	0,577	− 77,25	0,00
	22	− 9,32	24,98	− 10,0	0,595	− 88,68	+ 5,95
		+ 5,13	9,95	+ 14,0	0,595	− 83,40	− 8,32
	23	− 0,25	1,86	− 4,0	0,614	− 6,22	+ 2,46
		+11,92	37,67	− 2,0	0,619	−125,96	− 1,24
	24	− 3,62	4,73	+ 14,5	0,599	− 16,70	+ 8,67
		+ 8,07	18,16	+ 17,5	0,601	− 61,19	+10,52
	25	− 0,45	4,72	+ 21,0	0,607	− 16,41	+12,74
		+16,90	73,29	+ 17,0	0,609	−246,40	+10,35
	26	− 2,98	4,06	+ 17,0	0,607	− 13,35	+10,30
		+ 8,43	19,47	+ 19,0	0,607	− 65,78	+11,54
	27	+ 0,43	2,49	+ 25,5	0,604	− 8,36	+15,42
		+12,18	39,18	+ 21,5	0,604	−132,03	+12,97
	28	− 6,58	10,19	− 2,0	0,607	− 33,25	− 1,21
		+ 7,58	16,67	+ 5,5	0,609	− 56,46	+ 3,35
	29	−10,12	29,73	+ 4,5	0,586	− 97,69	+ 2,64
		+ 5,43	10,76	0,0	0,589	− 36,63	0,00
Luglio	3	+ 1,77	3,73	+ 12,5	0,563	− 12,66	− 7,36
		+14,52	55,40	− 7,5	0,562	−184,98	− 4,22
	4	− 9,78	26,58	+ 4,0	0,553	− 85,36	+ 2,21
		+ 4,30	7,43	+ 4,5	0,555	− 25,37	+ 1,58

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		mm	″	″	″
1838 Luglio	5	−11,67	38,22	+ 14,0	0,562	−122,67	+ 7,87
		+ 2,83	5,23	+ 4,0	0,563	− 37,80	+ 2,25
	10	− 8,20	21,56	+ 3,5	0,515	− 27,38	+ 1,80
		+ 8,88	23,13	+ 17,0	0,521	− 33,41	− 8,86
	11	− 6,80	15,05	+ 11,5	0,501	− 18,57	+ 5,76
		+11,53	37,32	− 11,0	0,504	− 52,99	− 5,54
1838 Dicembre	12	+ 2,13	5,54	+ 9,0	0,490	− 7,90	+ 4,41
		+21,13	120,20	+ 11,0	0,493	−166,71	+ 5,42
	13	+ 9,05	24,76	+ 5,5	0,493	− 35,03	+ 2,71
	14	− 9,27	26,68	+ 28,5	0,487	− 34,65	−13,88
		+ 8,22	17,08	− 30,0	0,490	− 24,32	−14,70
	16	− 5,18	12,33	+ 1,5	0,484	− 15,67	+ 0,73
		+11,32	34,90	+ 13,5	0,487	− 48,35	+ 6,57
	17	− 6,50	13,92	+ 2,5	0,484	− 18,15	+ 1,21
		+ 9,00	23,32	+ 5,0	0,487	− 32,28	+ 2,43
	19	− 3,07	5,85	+ 7,0	0,487	− 7,71	+ 3,41
		+13,60	49,07	+ 16,0	0,490	− 66,83	+ 7,84
	20	+18,30	35,84	+ 9,0	0,487	− 48,65	+ 4,38
	22	−15,83	66,56	+ 4,5	0,470	− 89,68	+ 2,11
		+ 0,50	3,14	+ 5,0	0,473	− 4,23	+ 2,36
	31	−24,02	146,57	+ 4,5	0,501	−202,62	+ 2,25
		−10,43	29,68	+ 7,5	0,503	− 42,03	+ 3,87
1839 Gennajo	1	−28,38	204,52	+ 2,0	0,500	−282,63	+ 1,00
		−18,88	51,47	+ 7,5	0,503	− 72,47	+ 3,87
	3	−81,35	250,48	+ 6,0	0,528	−347,61	+ 3,17
		−16,02	67,83	+ 9,0	0,531	− 95,91	+ 4,78
	4	+ 2,60	47,81	+ 11,5	0,512	− 64,33	+ 5,89
		+44,23	522,48	+ 19,0	0,513	−710,56	+ 9,75
	6	+ 4,03	6,53	− 9,0	0,499	− 7,72	− 4,49
		+17,95	82,96	− 8,0	0,501	−107,85	− 4,01

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		mm	″	″	″
1839 Giugno	6	− 3,37	6,25	− 2,0	0,531	− 21,25	− 1,06
		+ 9,72	25,68	0,0	0,532	− 81,01	0,00
	7	− 0,18	2,47	− 18,0	0,538	− 8,11	− 9,68
		+12,78	43,39	− 11,0	0,540	−138,57	− 5,94
	8	− 7,42	17,59	− 13,5	0,556	− 59,40	− 7,51
		+10,75	31,07	− 5,5	0,556	− 99,37	− 3,06
	9	− 1,17	2,79	− 6,0	0,577	− 9,42	− 3,46
		+11,67	36,58	0,0	0,577	−117,54	0,00
	10	− 4,30	7,70	+ 23,0	0,537	− 26,26	+12,35
		+10,63	30,71	+ 28,0	0,540	− 99,17	+15,12
	11	− 0,05	3,12	− 6,0	0,571	− 10,33	− 3,43
		+13,35	45,74	− 2,0	0,569	−148,87	− 1,14
	12	− 6,68	14,45	+ 1,0	0,563	− 49,01	+ 0,56
		+ 8,28	20,18	0,0	0,565	− 65,53	0,00
	13	− 3,95	8,06	0,0	0,586	− 27,36	0,00
		+12,20	40,60	+ 4,0	0,586	−133,07	+ 2,34
	14	− 5,07	8,71	+ 9,0	0,580	− 29,68	+ 5,22
		+ 7,32	15,65	+ 11,0	0,580	− 51,11	+ 6,38
	15	− 6,63	15,52	+ 18,0	0,575	− 52,55	+10,35
		+ 7,90	18,15	+ 22,5	0,578	− 59,62	+13,00
	16	− 4,88	11,88	+ 20,0	0,578	− 40,15	+11,56
		+10,75	31,41	+ 25,0	0,581	−103,85	+14,52
	17	− 8,18	19,35	+ 18,0	0,586	− 65,38	+10,55
		+ 6,07	11,42	+ 19,0	0,590	− 37,70	+11,21
	18	− 6,87	14,37	+ 10,5	0,600	− 48,51	+ 6,30
		+ 5,67	9,92	+ 12,5	0,611	− 32,87	+ 7,63
	19	−10,18	28,22	+ 20,5	0,595	− 95,01	+12,20
		+ 2,20	3,15	+ 22,5	0,598	− 10,45	+13,45
	20	− 7,60	16,35	− 6,5	0,604	− 55,04	− 3,93
		+ 4,23	6,39	− 3,5	0,607	− 21,27	− 2,12
	21	− 6,43	12,79	− 7,5	0,602	− 42,97	− 4,51
		+ 8,18	18,78	− 6,5	0,602	− 62,88	− 3,91

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d' una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		mm	″	″	″
1839 Giugno	22	− 2,17	3,39	− 4,0	0,595	− 11,35	− 2,38
		+11,83	36,72	0,0	0,596	−123,18	0,00
	23	− 2,10	3,44	− 6,0	0,583	− 11,16	− 3,50
		+12,32	40,43	− 5,0	0,586	−135,81	− 2,93
	24	− 8,70	22,55	− 10,5	0,584	− 75,21	− 6,13
		+ 5,30	9,61	− 8,0	0,587	− 32,41	− 4,60
	25	− 6,75	13,78	− 30,0	0,596	− 45,76	−17,88
		+ 6,08	11,30	− 24,5	0,598	− 38,18	−14,65
	26	− 9,47	24,64	− 3,0	0,593	− 81,73	− 1,78
		+ 3,37	4,84	+ 2,0	0,595	− 16,45	+ 1,19
	27	− 4,72	11,30	− 4,0	0,589	− 37,33	− 2,36
		+ 9,96	27,99	− 3,0	0,593	− 94,43	− 1,78
	28	− 5,48	9,81	− 4,5	0,581	− 32,14	− 2,61
		+ 6,85	14,13	− 1,5	0,583	− 47,90	− 0,87
	29	− 3,07	9,89	− 19,0	0,560	− 32,57	−10,64
		+12,35	40,54	− 13,5	0,562	−136,60	− 7,59
	30	− 6,23	11,72	− 11,5	0,546	− 38,09	− 6,28
		+ 6,43	12,35	− 5,5	0,548	− 41,98	− 3,01
Luglio	1	− 7,23	15,65	− 15,5	0,550	− 50,78	− 8,52
		+ 7,10	15,06	− 7,0	0,556	− 48,84	− 3,89
	2	− 8,48	20,58	− 2,0	0,554	− 66,64	− 1,11
		+ 4,80	7,98	− 0,5	0,559	− 27,25	− 0,28
	3	− 3,73	5,70	+ 2,0	0,554	− 18,06	+ 1,11
		+10,93	35,10	+ 2,5	0,557	−118,01	+ 1,39
	4	− 9,42	24,57	− 0,5	0,535	− 78,97	− 0,27
		+ 4,67	7,67	+ 3,5	0,537	− 26,23	+ 1,88
	5	− 5,90	8,05	− 2,0	0,528	− 25,09	− 1,06
		+ 7,10	14,62	+ 1,0	0,531	− 49,60	+ 0,53
	6	− 6,72	13,57	− 0,5	0,551	− 44,77	− 0,28
		+ 6,70	13,46	− 6,5	0,554	− 45,67	− 3,60
	7	− 6,22	12,85	− 4,0	0,563	− 40,27	− 2,25
		+ 6,62	12,79	− 5,5	0,569	− 39,96	− 3,12

Anno e giorno.		Σ a	Σ a⁴	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		mm	″	″	″
1839 Dicembre	28	− 3,95	10,62	− 4,0	0,399	− 14,14	− 1,65
		+14,23	54,08	+ 3,0	0,401	− 73,38	+ 1,20
	29	+17,47	82,00	+ 34,0	0,687	−108,31	+23,36
		.....	.....	.....	.....	.....	.....
	30	+ 3,82	7,63	+ 12,0	0,684	− 9,71	+ 8,21
	—	+21,48	150,20	+ 16,0	0,686	−159,01	+10,98
1840 Gennajo	31	+ 5,13	10,90	− 5,0	0,661	− 13,74	− 3,30
	1	+13,93	53,76	− 6,5	0,652	− 76,75	− 4,23
		+ 3,28	6,40	− 1,0	0,653	− 7,96	− 0,65
	7	−12,00	33,72	+ 33,0	0,647	− 49,46	+21,35
		+ 5,17	10,41	+ 31,0	0,650	− 12,62	+20,15
	8	+28,30	202,48	− 10,0	0,631	−267,96	− 6,31
	9	− 3,92	8,28	− 6,7	0,614	− 10,68	− 4,11
1840 Giugno	6	− 5,00	11,23	− 1,5	0,732	− 37,93	− 1,19
		+13,25	46,30	+ 2,0	0,735	+147,77	+ 1,47
	7	+ 0,20	2,13	+ 1,0	0,745	− 7,02	+ 0,74
		−12,38	40,87	+ 0,5	0,747	+136,82	+ 0,37
	8	− 3,75	5,58	+ 11,0	0,745	− 19,16	+ 8,19
		+ 8,75	20,70	+ 10,5	0,745	− 66,09	+ 7,82
	9	− 0,43	2,05	+ 12,0	0,739	− 6,84	+ 8,87
		+11,23	37,24	+ 14,0	0,739	−120,46	+10,35
	10	+ 0,07	8,09	+ 6,5	0,750	− 20,73	+ 4,88
		.....	.....	.....	.....	.....	.....
	11	− 6,87	13,82	− 11,5	0,765	− 46,76	− 8,79
		+ 6,30	12,27	− 8,0	0,768	− 39,68	− 6,14

Anno e giorno.	Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
	′		″	″	″	″
1846 Giugno 12	− 5,63	10,51	− 10,0	0,784	− 35,76	− 7,84
	+ 8,20	19,49	− 5,0	0,786	− 63,46	− 3,93
13	− 3,87	6,44	− 2,0	0,771	− 21,97	− 1,54
	+ 8,13	18,35	+ 5,0	0,771	− 59,97	+ 3,86
14	− 2,07	3,63	0,0	0,775	− 12,35	0,00
	+10,93	32,10	+ 1,0	0,775	−105,70	+ 0,77
15	− 1,53	2,29	+ 0,5	0,778	− 7,80	+ 0,39
	+ 9,72	24,98	− 1,0	0,780	− 82,41	− 0,78
16	− 4,25	6,73	− 3,5	0,778	− 22,86	− 2,72
	+ 8,37	19,92	− 4,5	0,781	− 69,89	− 3,51
17	− 1,00	5,01	− 22,5	0,777	− 16,84	−17,48
	+11,83	36,72	− 14,0	0,777	−122,08	−10,88
19	+ 9,20	8,40	+ 2,0	0,752	− 27,97	+ 1,50
	+19,12	87,91	− 2,5	0,753	−293,99	− 1,88
20	− 2,93	4,36	− 17,5	0,754	− 14,67	−13,20
	+10,40	29,27	− 15,0	0,756	− 97,97	−11,34
21	− 2,27	3,50	− 7,0	0,771	− 11,74	− 5,40
	+10,57	30,28	− 7,0	0,774	−101,54	− 5,42
22	− 4,47	6,63	− 8,5	0,768	− 22,14	− 6,53
	+ 8,70	20,44	− 8,0	0,771	− 68,68	− 6,17
25	− 5,93	11,01	− 8,0	0,728	− 36,45	− 5,82
	+ 7,40	15,91	− 3,0	0,728	− 53,78	− 2,18
26	− 3,60	5,46	− 12,0	0,726	− 17,93	− 8,71
	+10,40	29,27	− 10,0	0,728	− 98,75	− 7,28
27	− 3,80	5,83	− 11,0	0,734	− 19,06	− 8,07
	+ 9,53	25,06	− 8,0	0,735	− 84,64	− 5,88
28	− 4,73	7,82	− 13,0	0,730	− 25,49	− 9,49
	+ 8,36	20,69	− 7,0	0,732	− 70,08	− 5,12
30	− 5,13	8,81	− 18,0	0,732	− 28,44	−13,18
	+ 9,03	21,93	− 12,0	0,739	− 74,20	− 8,87

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		mm	″	″	″
1841 Giugno.	17	− 4,13	6,50	− 14,0	0,726	− 82,05	−10,16
		+ 9,20	23,37	− 13,0	0,729	− 77,53	− 9,48
	20	− 0,78	1,44	− 6,0	0,723	− 4,85	− 4,34
		+ 9,55	24,38	− 2,0	0,726	− 81,52	− 1,45
	21	− 7,33	15,67	− 22,0	0,738	− 52,56	−16,24
		+ 4,67	7,67	− 9,0	0,742	− 25,72	− 6,68
	22	− 2,47	2,77	− 25,0	0,769	− 9,26	−19,22
		+ 7,53	15,44	− 20,0	0,772	− 51,87	−15,44
	23	− 6,27	12,04	− 12,0	0,757	− 40,15	− 9,08
		+ 7,07	14,70	− 5,0	0,761	− 49,48	− 3,80
	24	+ 2,63	2,86	− 19,0	0,751	− 9,70	−14,28
	25	− 9,27	23,65	− 17,5	0,758	− 71,69	−11,56
		+ 4,07	6,36	− 17,5	0,758	− 21,56	−11,56
	26	+16,60	71,10	− 3,0	0,788	−239,13	− 2,36
	27	− 6,70	13,35	+ 8,0	0,787	− 43,91	+ 6,30
		+ 6,30	11,84	+ 11,0	0,788	− 40,17	+ 8,67
	28	− 7,60	16,67	− 5,5	0,792	− 54,67	− 4,36
		+ 5,73	10,44	+ 3,5	0,798	− 35,47	+ 2,80
	30	− 5,20	8,97	+ 10,0	0,751	− 29,00	+ 7,51
		+ 8,13	18,77	+ 10,0	0,753	− 63,57	+ 7,53
Luglio.	1	− 3,00	3,50	− 22,5	0,729	− 11,09	−16,40
		+ 7,00	13,50	− 18,0	0,730	− 45,92	−13,14
	2	− 3,73	4,72	− 4,5	0,748	− 14,91	− 3,37
		+ 6,27	11,06	− 7,5	0,748	− 37,73	− 5,61
	3	− 7,53	16,41	+ 5,0	0,748	− 62,58	+ 3,74
		+ 5,80	10,64	+ 4,0	0,751	− 36,24	+ 3,00
	4	− 3,20	3,80	+ 5,5	0,756	− 11,80	+ 4,16
		+ 6,80	12,81	+ 7,0	0,759	− 43,59	+ 5,31
	5	− 3,87	4,98	+ 13,0	0,757	− 15,43	+ 9,84
		+ 6,15	10,66	+ 9,5	0,760	− 36,39	+ 7,22

	Anno e giorno.	Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		m	″	″	″
1841 Dicembre	5	− 1,47	4,42	− 16,7	0,477	− 6,58	− 7,95
		. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	6	−15,70	64,98	− 7,5	0,477	− 87,10	− 3,58
		− 0,53	3,04	− 9,0	0,477	− 3,99	− 4,29
	8	−11,87	37,42	− 3,0	0,466	− 47,79	− 1,30
		+ 1,47	2,76	− 3,0	0,467	− 4,13	− 1,30
	9	− 8,20	19,03	+ 8,5	0,467	− 22,86	+ 3,97
		+ 3,80	5,83	+ 6,5	0,468	− 8,84	+ 3,04
			p				
	10	− 4′ 32″	− 0′ 8″	− 10,5	0,465	− 8,97	− 4,88
		+ 8 48	+ 3 12	− 9,5	0,466	− 31,23	− 4,43
	11	− 8 48	− 1 12	− 20,5	0,477	− 27,44	− 9,77
		+ 4 32	+ 2 8	− 19,5	0,477	− 10,86	− 9,31
	12	− 7 44	− 0 56	− 20,5	0,474	− 21,80	− 9,72
		+ 8 16	+ 2 4	− 16,0	0,475	− 9,96	− 7,50
	13	− 8 4	− 1 1	− 12,0	0,467	− 23,69	− 5,60
		+ 6 16	+ 2 19	− 8,5	0,467	− 13,24	− 3,97
	24	−12 52	− 2 13	+ 3,0	0,469	− 59,36	+ 1,41
		+ 4 28	+ 1 7	− 1,0	0,471	− 2,85	− 0,47
	25	−13 16	− 2 19	− 12,0	0,463	− 63,20	− 5,56
		+ 0 4	+ 1 1	− 15,0	0,465	− 2,99	− 6,97
	26	−11 0	− 1 45	− 16,5	0,464	− 44,75	− 7,65
		+ 2 25	+ 1 35	− 13,0	0,464	− 4,61	− 6,03
	31	− 7 44	− 0 56	− 8,5	0,465	− 24,67	− 3,95
		+ 5 36	+ 2 24	− 5,0	0,466	− 12,58	− 2,33
1842 Gennajo	1	− 9 24	− 1 21	− 2,0	0,466	− 34,85	− 0,93
		+ 3 56	+ 1 59	− 2,0	0,467	− 7,45	− 0,93
	6	− 9 28	− 1 22	+ 9,0	0,451	− 36,44	+ 4,06
		+ 3 52	+ 1 58	+ 12,0	0,451	− 7,19	+ 5,41

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d' una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		mm	″	″	″
1841 Giugno	17	− 4,13	6,50	− 14,0	0,726	− 22,05	−10,16
		+ 9,20	23,37	− 13,0	0,729	− 77,53	− 9,48
	20	− 0,78	1,44	− 6,0	0,723	− 4,85	− 4,34
		+ 9,55	24,38	− 2,0	0,726	− 81,52	− 1,45
	21	− 7,33	15,67	− 22,0	0,738	− 52,56	−16,24
		+ 4,67	7,67	− 9,0	0,742	− 25,72	− 6,68
	22	− 2,47	2,77	− 25,0	0,769	− 9,26	−19,22
		+ 7,53	15,44	− 20,0	0,772	− 51,87	−15,44
	23	− 6,27	12,04	− 12,0	0,757	− 40,15	− 9,08
		+ 7,07	14,70	− 5,0	0,761	− 49,48	− 3,80
	24	+ 2,63	2,86	− 19,0	0,751	− 9,70	−14,28
	25	− 9,27	23,65	− 17,5	0,758	− 71,69	−11,56
		+ 4,07	6,36	− 17,5	0,758	− 21,56	−11,56
	26	+16,60	71,10	− 3,0	0,788	−239,13	− 2,36
	27	− 6,70	13,35	+ 8,0	0,787	− 43,91	+ 6,30
		+ 6,30	11,84	+ 11,0	0,788	− 40,17	+ 8,67
	28	− 7,60	16,67	− 5,5	0,792	− 54,67	− 4,36
		+ 5,73	10,44	+ 3,5	0,798	− 35,47	+ 2,80
Luglio	30	− 5,20	8,97	+ 10,0	0,751	− 29,00	+ 7,51
		+ 8,13	18,77	+ 10,0	0,753	− 63,57	+ 7,53
	1	− 3,00	3,50	− 22,5	0,729	− 11,09	−16,40
		+ 7,00	13,50	− 18,0	0,730	− 45,92	−13,14
	2	− 3,73	4,72	− 4,5	0,748	− 14,91	− 3,37
		+ 6,27	11,06	− 7,5	0,748	− 37,73	− 5,61
	3	− 7,53	16,41	+ 5,0	0,748	− 62,58	+ 3,74
		+ 5,80	10,64	+ 4,0	0,751	− 36,24	+ 3,00
	4	− 3,20	3,80	+ 5,5	0,756	− 11,80	+ 4,16
		+ 6,80	12,81	+ 7,0	0,759	− 43,59	+ 5,31
	5	− 3,87	4,98	+ 13,0	0,757	− 15,43	+ 9,84
		+ 6,15	10,66	+ 9,5	0,760	− 36,39	+ 7,22

Anno e giorno.		Σ a	Σ a²	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′		m	″	″	″
1841 Dicembre	5	− 1,47	4,42	− 16,7	0,477	− 5,58	− 7,95
		. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	6	−15,70	64,98	− 7,5	0,477	− 87,10	− 3,58
		− 0,53	3,04	− 9,0	0,477	− 3,99	− 4,29
	8	−11,87	37,42	− 3,0	0,466	− 47,79	− 1,30
		+ 1,47	2,76	− 3,0	0,467	− 4,13	− 1,30
	9	− 8,20	19,03	+ 8,5	0,467	− 22,86	+ 3,97
		+ 3,80	5,83	+ 6,5	0,468	− 8,84	+ 3,04
			p				
	10	− 4′ 32″	− 0′ 8″	− 10,5	0,465	− 8,97	− 4,88
		+ 8 48	+ 3 12	− 9,5	0,466	− 31,23	− 4,43
	11	− 8 48	− 1 12	− 20,5	0,477	− 27,44	− 9,77
		+ 4 32	+ 2 8	− 19,5	0,477	− 10,86	− 9,31
	12	− 7 44	− 0 56	− 20,5	0,474	− 21,80	− 9,72
		+ 8 16	+ 2 4	− 16,0	0,475	− 9,96	− 7,50
	13	− 8 4	− 1 1	− 12,0	0,467	− 23,69	− 5,60
		+ 5 16	+ 2 19	− 8,5	0,467	− 13,24	− 3,97
	24	−12 52	− 2 13	+ 3,0	0,469	− 59,36	+ 1,41
		+ 4 28	+ 1 7	− 1,0	0,471	− 2,85	− 0,47
	25	−13 16	− 2 19	− 12,0	0,463	− 63,20	− 5,56
		+ 0 4	+ 1 1	− 15,0	0,465	− 2,99	− 6,97
	26	−11 0	− 1 45	− 16,5	0,464	− 44,75	− 7,65
		+ 2 25	+ 1 35	− 13,0	0,464	− 4,61	− 6,03
	31	− 7 44	− 0 56	− 8,5	0,465	− 24,67	− 3,95
		+ 5 36	+ 2 24	− 5,0	0,466	− 12,58	− 2,32
1842 Gennaio	1	− 9 24	− 1 21	− 2,0	0,466	− 34,85	− 0,93
		+ 3 56	+ 1 59	− 2,0	0,467	− 7,45	− 0,93
	6	− 9 28	− 1 22	+ 9,0	0,451	− 36,44	+ 4,06
		+ 3 52	+ 1 58	+ 12,0	0,451	− 7,19	+ 5,41

Anno e giorno.	Σ a	p	Σ liv.	Valore d' una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
	′ ″	′ ″	mm	″	″	″
1842 Dicembre 15	−15 12	− 2 48	0,0	0,493	− 79,96	0,00
	− 1 52	+ 0 32			− 4,43	− 0,12
	+11 28	+ 3 52	− 0,5	0,497	− 48,87	− 0,25
16	−25 56	− 5 29	− 4,5	0,520	−226,97	− 2,34
	−12 36	− 2 9			− 56,21	− 2,74
	+ 0 44	+ 1 11	+ 6,0	0,524	− 3,26	− 3,14
17	−10 20	− 1 35	+ 7,0	0,544	− 38,04	+ 3,81
	+ 3 0	+ 1 45			− 6,31	+ 2,72
	+16 20	+ 5 5	+ 3,0	0,548	− 94,44	+ 1,64
19	−19 4	− 3 46	+ 10,0	0,683	−124,10	+ 6,83
	− 5 44	− 0 26			− 13,65	+ 6,67
	+10 36	+ 3 34	+ 9,5	0,686	− 39,26	+ 6,52
20	−15 28	− 2 52	+ 9,0	0,690	− 83,01	+ 6,21
21	−11 52	+ 1 58	− 6,5	0,680	− 50,23	− 4,42
	+ 1 28	+ 1 22			− 3,74	− 3,92
	+14 48	+ 4 42	− 5,0	0,682	− 76,94	− 3,41
22	−16 20	− 3 5	+ 3,0	0,662	− 92,86	+ 1,99
	− 8 0	+ 0 15			− 6,02	+ 1,66
	+10 20	+ 3 35	+ 0,5	0,665	− 38,59	+ 0,35
23	−16 56	− 3 14	− 17,5	0,681	− 99,92	−11,92
	− 3 36	+ 0 6			− 7,26	−10,91
	+ 9 44	+ 3 26	− 14,5	0,683	− 34,63	− 9,90
29	−15 28	− 2 52	0,0	0,716	− 85,97	0,00
	− 2 8	+ 0 28			− 4,24	− 1,08
	+11 12	+ 3 48	− 3,0	0,720	− 43,75	− 2,16
30	− 8 0	− 1 0	+ 3,5	0,688	− 25,92	+ 2,41
	+ 5 20	+ 2 20			− 21,74	+ 2,41
	+18 40	+ 5 40	+ 3,5	0,689	−137,71	+ 2,41
31	− 8 32	− 1 8	+ 17,0	0,700	− 29,19	+11,90
	+ 4 28	+ 2 12			− 10,00	+11,91
	+18 8	+ 5 32	+ 17,0	0,702	−110,95	+11,93

Anno e giorno.		Σ a	p	Σ liv.	Valore d' una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	allo zenit.
		′ ″	′ ″	mm	″	″	″
1843 Gennajo	1	− 5 0	− 0 15	+ 5,5	0,722	− 12,47	+ 3,97
		+ 8 20	+ 3 5			− 24,86	+ 4,34
		+21 40	+ 6 25	+ 6,5	0,724	−157,69	+ 4,71
	2	− 5 36	− 0 24	+ 5,5	0,704	− 14,87	+ 3,87
		+ 7 44	+ 2 56			− 21,58	+ 3,34
		+21 4	+ 6 16	+ 4,0	0,702	−148,80	+ 2,81
	3	+ 1 48	+ 1 27	− 6,0	0,679	− 3,69	− 4,07
		+13 48	+ 4 27			− 64,39	+ 4,07
		+25 48	+ 7 27	− 6,0	0,680	−222,79	− 4,08
	(*) 4	+ 0 12	+ 0 48	− 21,0	0,671	− 1,66	−14,09
		+10 12	+ 3 18			− 34,44	−11,91
		+20 12	+ 5 48	− 14,5	0,672	−135,21	+ 9,74
1843 Giugno	10	+ 4 48	+ 2 12	− 43,0	0,612	− 25,39	−26,32
	11	+ 7 8	+ 2 47	− 28,7	0,594	− 48,11	−15,50
	12	− 3 56	+ 0 1	+ 11,0	0,505	− 20,84	+ 6,65
		+12 4	+ 4 1	+ 17,5	0,506	−126,03	+10,60
	14	− 4 40	− 0 10	− 1,5	0,584	− 26,13	− 0,88
		+11 20	+ 3 50	+ 2,5	0,585	−112,81	+ 1,46
	19	+ 3 30	Σ 32,13	+ 23,0	0,545	−107,46	+12,53
	20	− 6 28	− 0 37	− 5,0	0,561	− 42,29	− 2,80
		+10 52	+ 3 43	0,0	0,561	−106,09	0,00
	21	− 6 52	− 0 43	− 14,0	0,575	− 46,89	− 8,05
		+ 9 8	+ 3 17	− 13,5	0,573	− 77,46	− 7,77
	22	− 7 28	− 0 50	− 21,0	0,561	− 52,47	−11,78
		+ 8 40	+ 3 10	− 16,0	0,561	− 70,44	− 8,98
	23	− 5 4	− 0 16	− 12,0	0,566	− 28,84	− 6,79
		+ 9 36	+ 3 24	− 7,5	0,564	− 84,90	− 4,23
	24	− 2 56	+ 0 16	+ 11,0	0,560	− 14,53	+ 6,16
		+13 4	+ 4 16	+ 13,0	0,560	−150,98	+ 7,28
	25	− 3 52	Σ 6,71	+ 4,0	0,533	− 22,26	+ 2,13
		+12 28	+ 4 7	+ 7,0	0,533	−138,23	+ 3,73

(*) L' intervallo è di 30″.

Anno e giorno.		Σ a	p	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′ ″	′ ″	mm	″	″	″
1843 Giugno	26	− 9 28	− 1 22	+ 11,0	0,518	− 81,68	+ 5,70
		+ 6 32	+ 2 38	+ 6,5	0,518	− 43,63	+ 3,37
	27	−10 4	− 1 31	+ 7,5	0,522	− 91,14	+ 3,91
		+ 5 56	+ 2 29	− 0,5	0,522	− 37,37	+ 0,26
	30	+11 24	+ 3 51	− 7,5	0,501	−117,06	− 3,70
	1	− 7 32	− 0 53	+ 1,5	0,495	− 53,24	+ 0,75
		+ 8 28	+ 3 37	+ 2,0	0,494	− 68,17	+ 0,99
1843 Luglio	2	− 7 56	− 0 59	− 8,0	0,464	− 58,01	− 3,71
		+ 8 4	+ 3 1	− 3,5	0,460	− 62,61	− 1,61
	3	− 8 12	− 1 3	+ 4,5	0,422	− 61,79	+ 1,90
		+11 48	+ 3 57	+ 8,5	0,422	−124,53	+ 3,59
	4	− 5 52	− 0 28	+ 2,5	0,420	− 34,62	+ 1,05
		+10 8	+ 3 32	+ 7,0	0,420	− 93,94	+ 2,94
1843 Dicembre	5	−10 48	− 1 42	− 9,0	0,596	− 39,37	− 5,36
		+ 7 12	Σ 16,18			− 24,53	0,00
		+27 52	+ 7 58	+ 11,0	0,602	−277,91	+ 6,62
	6	−14 56	Σ 59,83	+ 20,0	0,599	− 77,08	+11,98
		+ 6 44	+ 2 41			− 20,59	+ 8,26
		+23 24	Σ 140,09	+ 7,5	0,607	−198,55	+ 4,55
	7	−13 4	− 2 16	− 1,0	0,611	− 57,46	− 0,61
		+ 2 56	+ 1 44			− 6,80	+ 0,00
		+18 56	+ 5 44	+ 1,0	0,617	−130,51	+ 0,62
	8	−18 12	− 3 33	− 4,0	0,613	−110,82	− 2,45
		− 2 12	+ 0 27			− 4,18	− 0,76
		+13 48	+ 4 27	+ 1,5	0,617	− 71,56	+ 0,92
	9	−19 24	− 3 51	+ 1,0	0,619	−126,00	+ 0,62
		− 3 24	+ 0 9			− 6,09	+ 0,93
		+12 36	+ 4 9	+ 2,0	0,626	− 60,12	+ 1,25
	16	−13 40	− 2 25	− 6,0	0,596	− 64,39	− 3,58
		+ 2 20	+ 1 35			− 5,11	− 2,39
		+18 40	+ 5 35	− 2,0	0,602	−118,58	− 1,20

Anno e giorno.		Σ a	p	Σ liv.	Valore d' una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′ ″	′ ″	mm	″	″	″
1843 Dicembre	17	−15 4	− 2 46	+ 7,5	0,595	− 78,05	+ 4,46
		+ 0 56	+ 1 14			− 3,39	+ 4,18
		+16 56	+ 5 14	+ 6,5	0,599	−101,27	+ 3,89
	24	−13 24	− 2 21	− 1,5	0,557	− 63,97	− 8,35
		+ 2 36	+ 1 39			− 5,56	− 6,30
		+18 36	+ 5 39	− 7,5	0,565	−118,74	− 4,24
	25	−14 48	− 2 42	0,0	0,569	− 77,65	− 0,00
		+ 1 12	+ 1 18			− 3,41	− 1,43
		+17 12	+ 5 18	− 5,0	0,575	− 98,35	− 2,87
	26	− 8 20	− 1 5	− 5,0	0,566	− 27,06	− 2,83
		+ 6 20	+ 2 35			− 16,01	− 3,40
		+20 20	+ 6 5	− 7,0	0,569	−140,70	− 3,98
	27	− 9 44	− 1 26	− 12,0	0,574	− 35,89	− 6,89
		+ 6 16	+ 2 34			− 15,61	− 7,05
		+20 56	+ 6 14	− 12,5	0,577	−148,64	− 7,21
	28	− 8 28	− 1 7	− 13,0	0,587	− 28,18	− 7,63
		+ 8 52	+ 3 13			− 28,52	− 8,38
		+23 32	+ 6 53	− 15,5	0,590	−187,02	− 9,14
	29	− 1 52	+ 0 32	− 21,0	0,598	− 3,92	−12,56
		+12 48	+ 4 12	− 16,0	0,602	− 56,55	− 9,63
	30	−13 56	− 2 29	− 4,0	0,587	− 70,78	− 2,35
		+ 2 4	+ 1 31			− 4,13	− 2,21
		+18 4	+ 5 31	− 3,5	0,592	−110,46	− 2,07
	31	−15 16	− 2 49	− 4,0	0,587	− 84,51	− 2,35
		+ 0 44	+ 1 11			− 2,37	− 3,24
		+16 44	+ 5 11	− 7,0	0,590	− 94,72	− 4,13
1844 Gennajo	1	−14 0	− 2 30	+ 21,0	0,589	− 72,05	+12,37
		+ 2 0	+ 1 30			− 3,98	+11,67
		+16 40	+ 5 10	+ 19,0	0,578	− 93,82	+10,98
	3	−11 24	− 1 51	+ 15,0	0,593	− 49,95	+ 8,89
		+ 4 36	+ 2 9			− 9,06	+ 5,49
		+20 36	+ 6 9	+ 3,5	0,596	−141,87	+ 2,09

Anno e giorno.		Σ a	p	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′ ″	′ ″	mm	″	″	″
1843 Giugno	26	− 9 28	− 1 22	+ 11,0	0,518	− 81,68	+ 5,70
		+ 6 32	+ 2 38	+ 6,5	0,518	− 43,63	+ 3,37
	27	−10 4	− 1 31	+ 7,5	0,522	− 91,14	+ 3,91
		+ 5 56	+ 2 29	− 0,5	0,522	− 37,37	+ 0,26
	30	+11 24	+ 3 51	− 7,5	0,501	−117,06	− 3,70
	1	− 7 32	− 0 53	+ 1,5	0,495	− 53,24	+ 0,75
		+ 8 28	+ 3 37	+ 2,0	0,494	− 68,17	+ 0,99
1843 Luglio	2	− 7 56	− 0 59	− 8,0	0,464	− 58,01	− 3,71
		+ 8 4	+ 3 1	− 3,5	0,460	− 62,61	− 1,61
	3	− 8 12	− 1 3	+ 4,5	0,422	− 61,79	+ 1,90
		+11 48	+ 3 57	+ 8,5	0,422	−124,53	+ 3,59
	4	− 5 52	− 0 28	+ 2,5	0,420	− 34,62	+ 1,05
		+10 8	+ 3 32	+ 7,0	0,420	− 93,94	+ 2,94
1843 Dicembre	5	−10 48	− 1 42	− 9,0	0,596	− 39,37	+ 5,36
		+ 7 12	Σ 16,18			− 24,53	0,00
		+27 52	+ 7 58	+ 11,0	0,602	−277,91	+ 6,62
	6	−14 56	Σ 59,83	+ 20,0	0,599	− 77,08	+11,98
		+ 6 44	+ 2 41			− 20,59	+ 8,26
		+23 24	Σ 140,09	+ 7,5	0,607	−198,65	+ 4,55
	7	−13 4	− 2 16	− 1,0	0,611	− 57,46	− 0,61
		+ 2 56	+ 1 44			− 6,80	+ 0,00
		+18 56	+ 5 44	+ 1,0	0,617	−130,51	+ 0,62
	8	−18 12	− 3 33	− 4,0	0,613	−110,82	− 2,45
		− 2 12	+ 0 27			− 4,18	− 0,76
		+13 48	+ 4 27	+ 1,5	0,617	− 71,56	+ 0,92
	9	−19 24	− 3 51	+ 1,0	0,619	−126,00	+ 0,62
		− 3 24	+ 0 9			− 6,09	+ 0,93
		+12 36	+ 4 9	+ 2,0	0,626	− 60,12	+ 1,25
	16	−13 40	− 2 25	− 6,0	0,596	− 64,39	− 3,58
		+ 2 20	+ 1 35			− 5,11	− 2,39
		+18 40	+ 5 35	− 2,0	0,602	−118,58	− 1,20

Anno e giorno.		Σ a	p	Σ liv.	Valore d' una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′ ″	′ ″	mm	″	″	″
1843 Dicembre	17	−15 4	− 2 46	+ 7,5	0,595	− 78,05	+ 4,46
		+ 0 56	+ 1 14			− 3,39	+ 4,18
		+16 56	+ 5 14	+ 6,5	0,599	−101,27	+ 3,89
	24	−13 24	− 2 21	− 2,5	0,557	− 63,97	− 8,35
		+ 2 36	+ 1 39			− 5,56	− 6,30
		+18 36	+ 5 39	+ 7,5	0,565	−118,74	− 4,24
	25	−14 48	− 2 42	0,0	0,569	− 77,65	− 0,00
		+ 1 12	+ 1 18			− 3,41	− 1,43
		+17 12	+ 5 18	− 5,0	0,575	− 98,35	− 2,87
	26	− 8 20	− 1 5	− 5,0	0,566	− 27,06	− 2,83
		+ 6 20	+ 2 35			− 16,01	− 3,40
		+20 20	+ 6 5	+ 7,0	0,569	−140,70	− 3,98
	27	− 9 44	− 1 26	− 12,0	0,574	− 35,89	− 6,89
		+ 6 16	+ 2 34			− 15,61	− 7,05
		+20 56	+ 6 14	− 12,5	0,577	−148,64	− 7,21
	28	− 8 28	− 1 7	− 13,0	0,587	− 28,18	− 7,63
		+ 8 52	+ 3 13			− 28,52	− 8,38
		+23 32	+ 6 53	− 15,5	0,590	−187,02	− 9,14
	29	− 1 52	+ 0 32	− 21,0	0,598	− 3,92	−12,56
		+12 48	+ 4 12	− 16,0	0,602	− 56,55	− 9,63
	30	−13 56	− 2 29	− 4,0	0,587	− 70,78	− 2,35
		+ 2 4	+ 1 31			− 4,13	− 2,21
		+18 4	+ 5 31	− 3,5	0,592	−110,46	− 2,07
	31	−15 16	− 2 49	− 4,0	0,587	− 84,51	− 2,35
1844 Gennajo		+ 0 44	+ 1 11			− 2,37	− 3,24
		+16 44	+ 5 11	− 7,0	0,590	− 94,72	− 4,13
	1	−14 0	− 2 30	+ 21,0	0,589	− 72,05	+12,37
		+ 2 0	+ 1 30			− 3,98	+11,67
		+16 40	+ 5 10	+ 19,0	0,578	− 93,82	+10,98
	3	−11 24	− 1 51	+ 15,0	0,593	− 49,95	+ 8,89
		+ 4 36	+ 2 9			− 9,06	+ 5,49
		+20 36	+ 6 9	+ 3,5	0,596	−141,87	+ 2,09

Anno e giorno.	Σ a	p	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
	′ ″	′ ″	—	″	″	″
1844 Giugno 8	− 7 32	− 0 53	+ 23,0	0,611	− 55,59	+14,01
	+ 8 28	+ 3 7	+ 16,0	0,611	− 64,32	+ 9,78
9	− 7 52	− 0 58	− 0,5	0,569	− 59,84	− 0,28
	+ 8 8	+ 3 2	+ 6,5	0,571	− 60,18	+ 3,72
10	− 8 20	− 1 5	+ 2,0	0,571	− 66,27	+ 1,14
	+ 7 40	+ 2 55	− 6,0	0,554	− 54,47	− 3,33
11	− 4 48	− 0 12	+ 24,0	0,553	− 27,26	+13,28
	+ 9 52	+ 3 28	+ 19,5	0,553	− 86,31	+10,80
12	− 5 16	− 0 19	− 13,5	0,540	− 31,20	− 7,28
	+ 9 44	+ 3 41	− 22,0	0,541	−101,51	−11,89
13	− 5 36	− 0 24	+ 9,0	0,522	− 34,24	+ 4,69
	+10 24	+ 3 36	+ 16,0	0,520	− 95,95	+ 8,32
14	− 6 8	− 0 32	+ 25,0	0,523	− 39,48	+13,09
	+ 9 52	+ 3 28	+ 28,0	0,523	− 87,34	+14,68
15	− 5 44	− 0 41	+ 23,5	0,499	− 46,04	+11,72
	+ 9 16	+ 3 19	+ 20,5	0,504	− 78,23	+10,78
16	− 7 16	− 0 49	+ 11,5	0,490	− 52,18	+ 5,64
	+ 8 44	+ 3 11	+ 12,0	0,490	− 70,43	+ 5,87
17	− 7 42	− 0 58	+ 3,0	0,471	− 59,73	+ 1,41
	+ 8 8	+ 3 2	+ 4,5	0,477	− 62,24	+ 2,15
18	− 8 24	− 1 6	+ 3,0	0,654	− 66,93	+ 1,95
	+ 7 36	+ 2 54	+ 6,0	0,656	− 55,42	+ 3,94
20	− 9 36	− 1 24	− 29,0	0,627	− 84,83	−18,16
	+ 6 24	+ 2 36	− 29,5	0,629	− 41,67	−18,56
21	− 3 28	+ 0 8	− 31,5	0,632	− 17,52	−19,91
	−12 32	+ 4 8	− 29,0	0,635	−139,10	−18,41
22	− 7 40	− 0 40	+ 4,5	0,642	− 44,54	+ 2,89
	+11 28	+ 3 20	+ 4,0	0,645	− 80,63	+ 2,58
23	− 7 12	− 0 48	+ 0,0	0,633	− 50,60	0,00
	+12 48	+ 4 12	− 3,5	0,635	−145,14	− 2,22

Anno e giorno.		Σ a	p	Σ liv.	Valore d'una parte.	Riduzione dell'arco quadruplo al merid.	Riduzione dell'arco quadruplo allo zenit.
		′ ″	′ ″	mm	″	″	″
1844 Giugno	24	− 5 0	− 0 15	− 5,5	0,623	− 28,10	− 3,42
		+ 9 40	+ 3 25	+ 1,5	0,627	− 86,19	+ 0,94
	25	− 8 12	− 1 3	− 16,0	0,641	− 63,10	−10,26
		+ 7 48	+ 2 57	− 13,0	0,644	− 58,86	− 8,37
	27	− 9 4	− 1 16	− 14,0	0,627	− 75,05	− 8,77
		+ 6 56	+ 2 44	− 6,5	0,630	− 48,25	− 4,09
	28	− 9 32	− 1 23	− 23,5	0,632	− 81,96	−14,86
		+ 6 28	+ 2 37	− 16,0	0,633	− 42,99	−10,12
	29	− 2 0	+ 1 30	+ 7,5	0,638	− 10,45	+ 4,79
		+16 40	+ 5 10	+ 18,0	0,641	−240,82	+11,54
	30	− 6 24	− 0 36	− 12,5	0,636	− 40,36	− 7,95
		+ 9 36	+ 3 24	− 7,0	0,636	− 85,35	− 4,45
1844 Luglio	1	− 0 12	+ 0 57	− 10,0	0,636	− 7,35	− 6,36
		+14 28	+ 4 37	− 0,5	0,638	−183,10	− 0,32
	2	−15 12	− 2 48	− 24,0	0,629	−195,22	−15,10
		+ 0 48	+ 1 12	− 15,0	0,632	− 8,02	− 9,49
	3	− 7 36	− 0 54	− 14,0	0,620	− 53,31	− 8,68
		+ 8 24	+ 3 6	− 8,5	0,620	− 67,15	−15,26
	4	− 8 0	− 1 0	− 18,0	0,619	− 58,06	−11,14
		+ 8 0	+ 3 0	− 15,5	0,617	− 61,64	− 9,55

Anno e giorno.	Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
	° ′ ″	″	° ′ ″	poll. lin.	°
1838 Lugl. 5	22 38 6,40	− 28,27	22 37 37,70	27 10,23	+ 21,7
	22 37 41,70	− 3,89	22 37 37,81		
10	68 21 11,82	− 7,30	68 21 4,52	27 10,20	+ 7,2
	68 21 14,25	− 10,57	68 21 3,68		
11	68 26 31,16	− 6,08	68 26 25,08	27 10,35	+ 5,0
	68 26 42,10	− 14,63	68 26 27,47		
1838 Dicembre 12	68 31 10,61	− 0,87	68 31 9,74	27 11,43	+ 3,7
	68 31 51,12	− 40,32	68 31 10,80		
13	68 35 39,53	− 8,08	68 35 31,46	28 0,10	+ 4,3
14	68 39 34,33	− 12,13	68 39 22,20	27 11,23	+ 3,4
	68 39 31,10	− 8,75	68 39 22,35		
16	68 45 33,01	− 3,73	68 45 29,28	27 11,10	+ 1,8
	68 45 43,54	− 10,44	68 45 33,10		
17	68 48 5,65	− 4,23	68 48 1,42	28 0,35	+ 3,1
	68 48 6,05	− 7,46	68 47 58,59		
19	68 51 30,02	− 1,07	68 51 28,95	28 0,55	+ 4,2
	68 51 50,67	− 14,75	68 51 35,92		
20	68 52 47,17	− 11,07	68 52 36,10	27 10,40	+ 2,2
22	68 53 38,35	− 21,89	68 53 16,46	28 0,12	+ 1,2
	68 53 16,48	− 0,47	68 53 16,01		
31	68 34 5,88	− 50,09	68 33 15,79	27 11,35	+ 5,7
	68 33 26,60	− 9,54	68 33 17,06		
1839 Gennajo 1	68 29 55,59	− 70,41	68 28 45,18	27 11,26	+ 5,3
	68 28 58,08	− 17,15	68 28 40,93		
3	68 19 47,53	− 86,08	68 18 21,45	27 7,40	+ 9,2
	68 18 42,73	− 22,78	68 18 19,95		
4	68 12 35,45	− 14,61	68 12 20,84	27 9,25	+ 4,7
	68 15 14,61	− 175,14	68 12 19,47		
6	67 59 7,42	− 3,05	67 59 4,37	27 5,88	+ 4,4
	67 59 39,82	− 27,96	67 59 11,86		

Anno e giorno.	Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
	° ′ ″	″	° ′ ″	pell. lin.	°
1839 Giugno 6	22 50 38,08	− 5,58	22 50 32,50	27 7,84	+ 17,0
	22 50 51,85	− 20,25	22 50 31,60		
7	22 44 19,41	− 4,45	22 44 14,96	27 9,75	+ 20,6
	22 44 57,07	− 36,13	22 44 20,94		
8	22 38 44,12	− 16,73	22 38 27,39	27 10,92	+ 20,5
	22 38 57,49	− 25,61	22 38 31,88		
9	22 33 11,06	− 3,22	22 33 7,84	27 10,97	+ 22,8
	22 33 36,17	− 29,38	22 33 6,79		
10	22 28 8,22	− 3,48	22 28 4,74	27 10,47	+ 18,9
	22 28 29,28	− 21,01	22 28 8,27		
11	22 23 33,43	− 3,44	22 23 29,99	27 11,82	+ 23,9
	22 24 8,26	− 37,50	22 23 30,76		
12	22 19 33,33	− 12,11	22 19 21,22	28 0,30	+ 21,8
	22 19 34,12	− 16,38	22 19 17,74		
13	22 15 34,92	− 6,84	22 15 28,08	27 11,27	+ 24,35
	22 16 6,10	− 32,68	22 15 33,42		
14	22 12 14,55	− 6,11	22 11 8,44	27 10,08	+ 23,2
	22 12 18,60	− 11,18	22 11 7,42		
15	22 9 19,03	− 10,55	22 9 8,48	27 10,55	+ 23,1
	22 9 23,48	− 11,65	22 9 11,83		
16	22 6 42,80	− 7,15	22 6 35,65	28 0,00	+ 25,05
	22 6 59,40	− 22,33	22 6 37,07		
17	22 4 41,86	− 13,71	22 4 28,15	27 11,92	+ 25,3
	22 4 33,76	− 6,62	22 4 27,14		
18	22 2 56,71	− 10,55	22 2 46,16	27 10,82	+ 26,25
	22 2 51,04	− 6,31	22 2 44,73		
19	22 1 48,57	− 20,70	22 1 27,87	27 10,94	+ 25,4
	22 1 22,24	+ 0,75	22 1 22,99		
20	22 0 46,00	− 14,74	22 0 31,26	27 10,96	+ 26,8
	22 0 37,90	− 5,85	22 0 32,05		
21	22 0 12,63	− 11,87	22 0 0,76	27 9,75	+ 25,6
	22 0 20,73	− 16,70	22 0 4,03		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	poll. lin.	°
1838 Lug. 1838 Dicembre	5	22 38 6,40	− 28,27	22 37 37,70	27 10,23	+ 21,7
		22 37 41,70	− 3,89	22 37 37,81		
	10	68 21 11,82	− 7,30	68 21 4,52	27 10,20	+ 7,2
		68 21 14,25	− 10,57	68 21 3,68		
	11	68 26 31,16	− 6,08	68 26 25,08	27 10,35	+ 5,0
		68 26 42,10	− 14,63	68 26 27,47		
	12	68 31 10,61	− 0,87	68 31 9,74	27 11,43	+ 3,7
		68 31 51,12	− 40,32	68 31 10,80		
	13	68 35 39,53	− 8,08	68 35 31,46	28 0,10	+ 4,3
	14	68 39 34,33	− 12,13	68 39 22,20	27 11,23	+ 3,4
		68 39 31,10	− 8,75	68 39 22,35		
	16	68 45 33,01	− 3,73	68 45 29,28	27 11,10	+ 1,8
		68 45 43,64	− 10,44	68 45 33,10		
	17	68 48 5,65	− 4,23	68 48 1,42	28 0,35	+ 3,1
		68 48 6,05	− 7,46	68 47 58,59		
	19	68 51 30,02	− 1,07	68 51 28,95	28 0,55	+ 4,2
		68 51 50,67	− 14,75	68 51 35,92		
	20	68 52 47,17	− 11,07	68 52 36,10	27 10,40	+ 2,2
	22	68 53 38,35	− 21,89	68 53 16,46	28 0,12	+ 1,2
		68 53 16,48	− 0,47	68 53 16,01		
	31	68 34 5,88	− 50,09	68 33 15,79	27 11,35	+ 5,7
		68 33 26,60	− 9,54	68 33 17,06		
1839 Gennajo	1	68 29 55,59	− 70,41	68 28 45,18	27 11,26	+ 5,3
		68 28 58,08	− 17,15	68 28 40,93		
	3	68 19 47,53	− 86,08	68 18 21,45	27 7,40	+ 9,2
		68 18 42,73	− 22,78	68 18 19,95		
	4	68 12 35,45	− 14,61	68 12 20,84	27 9,25	+ 4,7
		68 15 14,61	− 175,14	68 12 19,47		
	6	67 59 7,42	− 3,05	67 59 4,37	27 5,88	+ 4,4
		67 59 39,82	− 27,96	67 59 11,86		

Anno e giorno.	Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
	° ′ ″	″	° ′ ″	pll. lin.	°
1839 Giugno 6	22 50 38,08	− 5,58	22 50 32,50	27 7,84	+ 17,0
	22 50 51,85	− 20,25	22 50 31,60		
7	22 44 19,41	− 4,45	22 44 14,96	27 9,75	+ 20,6
	22 44 57,07	− 36,13	22 44 20,94		
8	22 38 44,12	− 16,73	22 38 27,39	27 10,92	+ 20,5
	22 38 57,49	− 25,61	22 38 31,88		
9	22 33 11,06	− 3,22	22 33 7,84	27 10,07	+ 22,8
	22 33 36,17	− 29,38	22 33 6,79		
10	22 28 8,22	− 3,48	22 28 4,74	27 10,47	+ 18,9
	22 28 29,28	− 21,01	22 28 8,27		
11	22 23 33,43	− 3,44	22 23 29,99	27 11,82	+ 23,9
	22 24 8,26	− 37,50	22 23 30,76		
12	22 19 33,31	− 12,11	22 19 21,20	28 0,30	+ 21,8
	22 19 34,12	− 16,38	22 19 17,74		
13	22 15 34,92	− 6,84	22 15 28,08	27 11,27	+ 24,35
	22 16 6,10	− 32,68	22 15 33,42		
14	22 12 14,55	− 6,11	22 11 8,44	27 10,08	+ 23,2
	22 12 18,60	− 11,18	22 11 7,42		
15	22 9 19,03	− 10,55	22 9 8,48	27 10,55	+ 23,1
	22 9 23,48	− 11,65	22 9 11,83		
16	22 6 42,80	− 7,15	22 6 35,65	28 0,00	+ 25,05
	22 6 59,40	− 22,33	22 6 37,07		
17	22 4 41,86	− 13,71	22 4 28,15	27 11,92	+ 25,3
	22 4 33,76	− 6,62	22 4 27,14		
18	22 2 56,71	− 10,55	22 2 46,16	27 10,82	+ 26,25
	22 2 51,04	− 6,31	22 2 44,73		
19	22 1 48,57	− 20,70	22 1 27,87	27 10,94	+ 25,4
	22 1 22,34	+ 0,75	22 1 22,99		
20	22 0 46,00	− 14,74	22 0 31,26	27 10,95	+ 26,8
	22 0 37,90	− 5,85	22 0 32,05		
21	22 0 12,63	− 11,87	22 0 0,76	27 9,75	+ 25,6
	22 0 20,73	− 16,70	22 0 4,03		

Anno e giorno.	Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
	° ′ ″	″	° ′ ″	poll. lin.	°
1840 Giugno 12	22 16 36,83	− 10,90	22 16 25,93	27 10,05	+ 26,0
	22 16 43,31	− 16,85	22 16 26,46		
13	22 13 2,23	− 5,88	22 12 56,35	27 9,95	+ 23,35
	22 13 8,71	− 14,03	22 12 54,68		
14	22 9 56,44	− 3,09	22 9 53,35	27 10,04	+ 24,2
	22 10 19,93	− 16,23	22 9 53,70		
15	22 7 16,87	− 1,85	22 7 15,02	27 10,79	+ 24,2
	22 7 35,09	− 20,80	22 7 14,29		
16	22 5 6,00	− 6,34	22 4 59,66	27 10,03	+ 24,35
	22 5 16,94	− 17,35	22 4 59,59		
17	22 3 17,26	− 8,58	22 3 8,68	27 10,63	+ 24,6
	22 3 41,97	− 33,24	22 3 8,73		
19	22 0 48,88	− 6,62	22 0 42,26	27 10,73	+ 22,55
	22 1 59,75	− 73,03	22 0 46,72		
20	22 0 14,40	− 6,97	22 0 7,43	27 10,65	+ 24,0
	22 0 35,87	− 27,33	22 0 8,54		
21	21 59 59,88	− 4,28	21 59 55,60	27 10,95	+ 25,3
	22 0 22,55	− 26,74	21 59 55,81		
24	22 0 20,17	− 7,17	22 0 13,00	27 10,40	+ 24,30
	22 0 28,87	− 18,71	22 0 10,16		
25	22 3 32,55	− 10,57	22 3 21,98	27 8,60	+ 19,2
	22 3 33,36	− 13,99	22 3 19,37		
26	22 5 21,70	− 6,66	22 5 15,04	27 9,87	+ 19,8
	22 5 40,73	− 26,51	22 5 14,22		
27	22 7 37,17	− 6,78	22 7 30,39	27 10,86	+ 19,5
	22 7 56,21	− 22,63	22 7 33,58		
28	22 10 23,68	− 8,74	22 10 14,94	27 10,40	+ 20,1
	22 10 34,10	− 18,80	22 10 15,30		
30	22 17 4,47	− 10,40	22 16 54,07	27 9,70	+ 21,3
	22 17 14,60	− 20,77	22 16 53,83		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	pall. lin.	°
1840 Luglio	2	22 25 19,89	− 9,00	22 25 10,89	27 10,35	+ 23,5
		22 25 24,35	− 15,16	22 25 9,19		
	3	22 29 55,39	− 2,94	22 29 52,45	27 8,70	+ 23,45
		22 30 28,60	− 36,91	22 29 51,69		
	4	22 35 1,07	− 0,37	22 35 0,70	27 7,67	+ 23,1
		22 35 13,22	− 11,23	22 35 1,99		
	5	22 40 34,79	− 2,98	22 40 31,81	27 10,30	+ 19,6
		22 40 59,90	− 26,32	22 40 33,58		
Dicembre	6	67 59 45,14	− 25,89	67 59 19,25	27 10,37	+ 4,9
		67 59 27,32	− 8,30	67 59 19,02		
	7	68 7 38,68	− 89,41	68 6 9,27	27 9,70	+ 4,9
		68 6 15,86	− 7,93	68 6 7,93		
		68 6 16,06	− 24,10	68 6 1,96		
	9	68 18 41,26	− 17,00	68 18 24,26	27 5,37	+ 5,3
		68 18 24,25	− 0,34	68 18 23,91		
	10	68 24 4,05	− 14,77	68 23 49,28	27 7,93	+ 3,3
		68 23 43,40	+ 4,78	68 23 48,18		
	11	68 29 1,37	− 15,13	68 28 46,24	27 9,02	+ 4,1
		68 28 49,22	− 0,82	68 28 48,40		
	23	68 52 57,96	− 17,56	68 52 40,20	28 0,10	+ 2,6
		68 52 52,18	− 14,89	68 52 37,29		
	24	68 51 42,37	− 10,08	68 51 32,29	27 11,38	+ 3,5
		68 51 40,35	− 2,67	68 51 37,68		
	25	68 49 69,15	− 4,01	68 49 55,14	28 1,90	+ 3,2
		68 50 19,40	− 24,27	68 49 55,13		
	26	68 47 59,27	− 7,30	68 47 51,97	28 3,52	+ 1,4
		68 48 8,58	− 15,71	68 47 52,87		
	27	68 45 28,86	− 3,06	68 45 25,80	28 3,80	+ 0,8
		68 45 30,89	− 7,70	68 45 23,19		
	28	68 42 48,48	− 19,90	68 42 28,58	28 2,90	+ 1,6
		68 42 28,23	− 3,37	68 42 24,86		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.		Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	poll.	lin.	°
1840 Dicembre	29	68 39 14,80	− 6,71	68 39 8,09	28	0,35	+ 2,8
		68 39 15,60	− 11,21	68 39 4,39			
	30	68 35 28,60	− 17,09	68 35 11,51	27	9,70	+ 1,5
		68 35 16,25	− 4,62	68 35 11,63			
	31	68 30 58,46	+ 1,10	68 30 59,56	27	8,50	+ 1,8
		68 31 7,78	− 8,65	68 30 59,13			
1841 Gennajo	1	68 26 10,31	− 4,55	68 26 5,76	27	5,70	+ 0,8
		68 26 9,50	− 3,63	68 26 5,87			
	2	68 20 58,26	− 5,77	68 20 52,49	27	7,46	+ 0,4
		68 20 52,58	− 4,14	68 20 48,44			
	3	68 15 15,78	− 11,25	68 15 4,53	27	6,55	+ 2,0
		68 15 11,73	− 2,00	68 15 9,73			
Giugno	6	22 47 20,24	− 4,66	22 47 15,58	27	5,60	+ 19,2
		22 47 25,91	− 10,38	22 47 15,53			
	7	22 41 29,00	− 10,38	22 41 18,62	27	2,65	+ 16,6
		22 41 21,31	− 4,90	22 41 16,41			
	8	22 35 52,40	− 9,84	22 35 42,56	27	4,43	+ 16,1
		22 35 52,40	− 11,25	22 35 41,15			
	9	22 30 43,59	− 11,67	22 30 31,92	27	6,10	+ 18,6
		22 30 39,94	− 10,36	22 30 29,58			
	10	22 25 39,03	+ 3,27	22 25 42,30	27	4,50	+ 17,6
		22 26 11,43	− 29,35	22 25 42,08			
	12	22 17 26,44	− 3,86	22 17 22,58	27	5,55	+ 19,2
		22 17 54,39	− 37,71	22 17 16,68			
	13	22 14 2,33	− 14,67	22 13 47,66	27	7,04	+ 19,2
		22 13 57,47	− 12,33	22 13 45,14			
	15	22 7 58,79	− 7,35	22 7 51,44	27	9,92	+ 16,9
		.....	.....	.....			
	16	22 5 45,54	− 13,80	22 5 31,74	27	9,43	+ 20,2
		22 5 43,52	− 12,36	22 5 31,16			

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	poll. lin.	°
1840 Luglio	2	22 25 19,89	− 9,00	22 25 10,89	27 10,35	+ 23,5
		22 25 24,35	− 15,16	22 25 9,19		
	3	22 29 55,39	− 2,94	22 29 52,45	27 8,70	+ 23,45
		22 30 28,60	− 36,91	22 29 51,69		
	4	22 35 1,07	− 0,37	22 35 0,70	27 7,67	+ 23,1
		22 35 13,22	− 11,23	22 35 1,99		
	5	22 40 34,79	− 2,98	22 40 31,81	27 10,30	+ 19,6
		22 40 59,90	− 26,32	22 40 33,58		
Dicembre	6	67 59 45,14	− 25,89	67 59 19,25	27 10,37	+ 4,9
		67 59 27,32	− 8,30	67 59 19,02		
	7	68 7 38,68	− 89,41	68 6 9,27	27 9,70	+ 4,9
		68 6 15,86	− 7,93	68 6 7,93		
		68 6 16,06	− 24,10	68 6 1,96		
	9	68 18 41,26	− 17,00	68 18 24,26	27 5,37	+ 5,3
		68 18 24,25	− 0,34	68 18 23,91		
	10	68 24 4,05	− 14,77	68 23 49,28	27 7,93	+ 3,3
		68 23 43,40	+ 4,78	68 23 48,18		
	11	68 29 1,37	− 15,13	68 28 46,24	27 9,02	+ 4,1
		68 28 49,22	− 0,82	68 28 48,40		
	23	68 52 57,96	− 17,56	68 52 40,20	28 0,10	+ 2,6
		68 52 52,18	− 14,89	68 52 37,29		
	24	68 51 42,37	− 10,08	68 51 32,29	27 11,38	+ 3,5
		68 51 40,35	− 2,67	68 51 37,68		
	25	68 49 69,15	− 4,01	68 49 55,14	28 1,90	+ 3,2
		68 50 19,40	− 24,27	68 49 55,13		
	26	68 47 59,27	− 7,30	68 47 51,97	28 3,52	+ 1,4
		68 48 8,58	− 15,71	68 47 52,87		
	27	68 45 28,86	− 3,06	68 45 25,80	28 3,80	+ 0,8
		68 45 30,89	− 7,70	68 45 23,19		
	28	68 42 48,48	− 19,90	68 42 28,58	28 2,90	+ 1,6
		68 42 28,23	− 3,37	68 42 24,86		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	pell. lin.	°
1840 Dicembre	29	68 39 14,80	− 6,71	68 39 8,09	28 0,35	+ 2,8
		68 39 15,60	− 11,21	68 39 4,39		
	30	68 35 28,60	− 17,09	68 35 11,51	27 9,70	+ 1,5
		68 35 16,25	− 4,62	68 35 11,63		
	31	68 30 58,46	+ 1,10	68 30 59,56	27 8,50	+ 1,8
		68 31 7,78	− 8,65	68 30 59,13		
1841 Gennajo	1	68 26 10,31	− 4,55	68 26 5,76	27 5,70	+ 0,8
		68 26 9,50	− 3,63	68 26 5,87		
	2	68 20 58,26	− 5,77	68 20 52,49	27 7,46	+ 0,4
		68 20 52,58	− 4,14	68 20 48,44		
	3	68 15 15,78	− 11,25	68 15 4,53	27 6,55	+ 2,0
		68 15 11,73	− 2,00	68 15 9,73		
Giugno	6	22 47 20,24	− 4,66	22 47 15,58	27 5,60	+ 19,2
		22 47 25,91	− 10,38	22 47 15,53		
	7	22 41 29,00	− 10,38	22 41 18,62	27 2,65	+ 16,6
		22 41 21,31	− 4,90	22 41 16,41		
	8	22 35 52,40	− 9,84	22 35 42,56	27 4,43	+ 16,1
		22 35 52,40	− 11,25	22 35 41,15		
	9	22 30 43,59	− 11,67	22 30 31,92	27 6,10	+ 18,6
		22 30 39,94	− 10,36	22 30 29,58		
	10	22 25 39,03	+ 3,27	22 25 42,30	27 4,50	+ 17,6
		22 26 11,43	− 29,35	22 25 42,08		
	12	22 17 26,44	− 3,86	22 17 22,58	27 5,55	+ 19,2
		22 17 54,39	− 37,71	22 17 16,68		
	13	22 14 2,33	− 14,67	22 13 47,66	27 7,04	+ 19,2
		22 13 57,47	− 12,33	22 13 45,14		
	15	22 7 58,79	− 7,35	22 7 51,44	27 9,92	+ 16,9
		.....	.....	.....		
	16	22 5 45,54	− 13,80	22 5 31,74	27 9,43	+ 20,2
		22 5 43,52	− 12,36	22 5 31,16		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	pell. lin.	°
1841 Giugno	17	22 3 43,03	− 8,05	22 3 34,98	27 10,60	+ 19,3
		22 3 55,18	− 21,75	22 3 33,43		
	20	22 0 18,15	− 2,30	22 0 15,85	27 8,40	+ 19,1
		22 0 35,57	− 20,74	22 0 14,83		
	21	22 0 17,24	− 17,20	22 0 0,04	27 11,65	+ 20,2
		22 0 7,52	− 8,10	21 59 59,42		
	22	22 0 15,47	− 7,12	22 0 8,35	28 0,18	+ 23,1
		22 0 21,95	− 16,83	22 0 5,12		
	23	22 0 53,13	− 12,31	22 0 40,82	27 9,44	+ 22,3
		22 0 51,51	− 13,32	22 0 38,19		
	24	22 1 44,16	− 6,00	22 1 38,16	27 7,99	+ 21,7
	25	22 3 25,16	− 20,81	22 3 4,35	27 9,00	+ 21,2
		22 3 8,96	− 8,28	22 3 0,68		
	26	22 5 46,55	− 60,37	22 4 46,18	27 10,70	+ 24,1
	27	22 7 11,96	− 10,15	22 7 1,81		
		22 7 8,32	− 7,87	22 7 0,45	27 11,04	+ 25,9
	28	22 9 49,20	− 12,58	22 9 36,62		
		22 9 44,75	− 8,17	22 9 36,38	27 10,30	+ 25,2
Luglio	30	22 16 9,60	− 5,37	22 16 4,23	27 8,97	+ 23,0
		22 16 15,27	− 14,01	22 16 1,26		
	1	22 19 56,73	− 6,87	22 19 49,86	27 9,30	+ 19,1
		22 20 8,55	− 14,76	22 19 53,79		
	2	22 24 11,40	− 4,57	22 24 6,83	27 10,02	+ 21,5
		22 24 16,25	− 10,83	22 24 5,42		
	3	22 28 56,26	− 12,21	22 28 44,05	27 9,83	+ 23,1
		22 28 51,40	− 8,31	22 28 43,09		
	4	22 33 49,78	− 1,91	22 33 47,87	27 9,80	+ 22,5
		22 33 55,05	− 9,57	22 33 45,48		
	5	22 39 15,15	− 1,40	22 39 13,75	27 10,46	+ 24,3
		22 39 19,20	− 7,29	22 39 11,91		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	poll. lin.	°
1841 Dicembre	5	67 50 15,81	− 3,38	67 50 12,13	27 7,78	+ 10,5
		.....	.....	.....		
	6	67 57 52,70	− 22,67	67 57 30,03	27 9,88	+ 9,2
		67 57 36,10	− 2,07	67 57 34,03		
	8	68 11 6,65	− 12,27	68 10 54,38	27 7,28	+ 6,3
		68 10 56,53	− 1,36	68 10 55,17		
	9	68 17 1,68	− 4,72	68 16 56,96	27 4,50	+ 7,1
		68 16 56,82	− 1,45	68 16 55,37		
	10	68 22 32,26	− 3,46	68 22 28,80	27 7,39	+ 5,1
		68 22 38,75	− 8,91	68 22 29,84		
	11	68 27 51,20	− 9,30	68 27 41,90	27 6,30	+ 8,5
		68 27 44,32	− 5,04	68 27 39,28		
	12	68 32 23,26	− 7,88	68 32 15,38	27 9,32	+ 8,3
		68 32 20,02	− 4,36	68 32 15,66		
	13	68 36 33,70	− 7,32	68 36 26,38	27 9,10	+ 6,1
		68 36 29,65	− 4,30	68 36 25,35		
	24	68 52 2,77	− 14,49	68 51 48,18	27 10,19	+ 8,2
		68 52 2,37	− 0,83	68 52 1,54		
	25	68 50 38,74	− 17,19	68 50 21,55	27 9,76	+ 5,4
		68 50 24,36	− 2,49	68 50 21,87		
	26	68 48 39,31	− 13,10	68 48 26,21	27 5,76	+ 4,3
		68 48 32,83	− 2,66	68 48 30,17		
	31	68 32 8,15	− 7,15	68 32 1,00	27 8,53	+ 6,8
		68 32 4,15	− 3,73	68 32 0,42		
1842 Gennajo	1	68 27 33,59	− 8,94	68 27 24,65	27 9,62	+ 6,3
		68 27 24,27	− 2,09	68 27 22,18		
	6	67 57 17,57	− 8,09	67 57 9,48	27 4,78	+ 1,7
		67 57 5,42	− 0,44	67 57 4,98		

Anno e giorno.	Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
	° ′ ″	″	° ′ ″	pall. lin.	°
1842 Giugno 6	22 49 18,00	− 26,23	22 48 51,77	27 9,07	22,6
	22 49 6,66	− 15,64	22 48 51,02		
7	22 42 47,48	− 2,44	22 42 45,04	27 9,10	22,1
	22 43 16,23	− 31,35	22 42 44,88		
8	22 37 11,53	− 5,09	22 37 6,44	27 9,83	24,4
	22 37 18,82	− 13,44	22 37 5,38		
9	22 32 6,71	− 19,54	22 31 47,17	27 9,38	21,4
	22 31 46,46	− 0,77	22 31 45,69		
10	22 27 20,58	− 26,05	22 26 54,53	27 9,50	22,2
	22 26 58,31	− 6,41	22 26 51,90		
11	22 22 40,02	− 15,24	22 22 24,78	27 10,83	22,1
	22 22 32,73	− 11,70	22 22 21,03		
13	22 14 49,10	− 9,12	22 14 39,98	27 11,20	25,0
	22 14 49,91	− 10,86	22 14 39,05		
14	22 11 36,27	− 12,21	22 11 24,06	27 9,95	25,4
	22 11 25,34	− 3,76	22 11 21,58		
16	22 6 16,98	− 10,13	22 6 6,85	27 8,30	22,3
	22 6 15,36	− 10,01	22 6 5,35		
17	22 4 19,58	− 14,29	22 4 5,29	27 8,30	23,1
	22 4 10,67	− 7,57	22 4 3,10		
18	22 2 32,46	− 6,42	22 2 26,04	27 8,70	22,1
	22 2 41,37	− 14,33	22 2 27,04		
19	22 1 26,90	− 10,71	22 1 16,19	27 8,82	21,3
	22 1 39,86	− 26,50	22 1 13,36		
20	22 0 32,07	− 3,94	22 0 28,13	27 8,69	22,5
	22 0 52,73	− 25,79	22 0 26,94		
22	22 0 13,34	− 7,09	22 0 6,25	27 9,60	21,2
	22 0 16,18	− 10,35	22 0 5,83		
23	22 0 42,80	− 11,34	22 0 31,46	27 7,30	19,6
	22 0 41,59	− 9,20	22 0 32,39		

Anno e giorno.	Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
	° ′ ″	″	° ′ ″	poll. lin.	°
1843 Gennaio 1	68 28 36,92	− 2,12	68 28 34,80	27 5,63	+ 10,0
	68 28 37,83	− 5,13	68 28 32,70		
	68 29 10,13	− 38,25	68 28 31,88		
2	68 23 31,65	− 2,75	68 23 28,90	27 5,55	+ 6,1
	68 23 32,46	− 4,56	68 23 27,90		
	68 24 4,86	− 36,50	68 23 28,36		
3	68 17 57,88	− 1,94	68 17 55,94	27 8,0	+ 4,2
	68 18 10,49	− 17,11	68 17 53,38		
	68 18 52,56	− 56,72	68 17 55,84		
4	67 11 59,91	− 3,94	68 11 55,97	27 11,78	+ 4,75
	68 12 6,39	− 11,59	68 11 54,80		
	68 12 30,69	− 36,24	68 11 54,45		
1843 Giugno 10	22 28 17,23	− 12,93	22 28 4,30	27 8,1	+ 19,9
11	22 23 43,15	− 15,90	22 23 27,25	27 7,1	+ 18,0
12	22 19 19,49	− 3,55	22 19 15,94	27 5,8	+ 18,6
	22 19 45,51	− 28,86	22 19 16,65		
14	22 12 16,37	− 6,75	22 12 9,62	27 8,2	+ 18,4
	22 12 36,52	− 27,84	22 12 8,68		
19	22 1 54,39	− 23,73	22 1 30,66	27 7,8	+ 17,2
20	22 0 48,58	− 11,27	22 0 37,31	27 7,1	+ 19,3
	22 1 4,47	− 26,52	22 0 37,95		
21	22 0 22,66	− 13,73	22 0 8,93	27 8,5	+ 19,7
	22 0 27,92	− 21,31	22 0 6,61		
22	22 0 20,33	− 16,06	22 0 4,27	27 8,7	+ 19,0
	22 0 25,49	− 19,85	22 0 5,64		
23	22 0 34,30	− 8,91	22 0 25,39	27 7,8	+ 20,5
	22 0 48,58	− 22,28	22 0 26,30		
24	22 1 14,70	− 2,09	22 1 12,61	27 6,4	+ 20,7
	22 1 46,49	− 35,92	22 1 10,57		
25	22 2 27,20	− 5,03	22 2 22,17	27 5,4	+ 19,2
	22 2 56,15	− 33,62	22 2 22,53		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	pell. lin.	°
1843 Giugno	26	22 4 18,77	− 19,00	22 3 59,77	27 6,2	+ 18,4
		22 4 8,55	− 10,06	22 3 58,49		
	27	22 6 22,20	− 21,81	22 6 0,39	27 7,7	+ 17,85
		22 6 9,39	− 9,41	22 5 59,98		
	30	22 14 57,36	− 30,20	22 14 27,16	27 8,5	+ 18,3
	1	22 18 21,17	− 13,12	22 18 8,05	27 9,8	+ 19,5
		22 18 22,08	− 16,80	22 18 5,28		
1843 Luglio	2	22 22 24,88	− 15,43	22 22 9,45	27 10,7	+ 19,5
		22 22 23,06	− 16,05	22 22 7,01		
	3	22 26 48,33	− 14,97	22 26 33,36	27 9,8	+ 22,0
		22 27 5,95	− 30,23	22 26 35,72		
	4	22 31 32,64	− 8,39	22 31 24,25	27 10,4	+ 23,4
		22 31 48,34	− 22,75	22 31 25,59		
1843 Dicembre	5	68 46 23,74	− 11,18	68 46 12,56	27 11,55	+ 5,5
		68 46 24,45	− 6,13	68 46 18,32		
		68 47 29,35	− 67,82	68 46 21,53		
	6	68 54 9,29	− 16,27	68 53 53,02	27 10,42	+ 7,7
		68 53 57,24	− 3,08	68 53 54,16		
		68 54 41,39	− 48,50	68 53 52,89		
	7	68 1 12,72	− 14,52	68 0 58,20	27 11,19	+ 6,8
		68 1 0,47	− 1,70	68 0 58,77		
		68 1 30,03	− 32,47	68 0 57,56		
	8	68 8 8,86	− 28,32	68 7 40,54	27 9,90	+ 6,5
		68 7 41,82	− 1,23	68 7 40,59		
		68 7 56,71	− 17,66	68 7 39,05		
	9	68 14 27,73	− 31,34	68 13 56,39	27 8,40	+ 9,7
		68 13 58,57	− 1,29	68 13 57,28		
		68 14 12,75	− 14,72	68 13 58,03		
	16	68 45 6,13	− 16,99	68 44 49,14	27 10,90	+ 8,1
		68 44 49,32	− 1,87	68 44 47,45		
		68 45 18,58	− 29,94	68 44 48,64		

Anno e giorno.	Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
	° ′ ″	″	° ′ ″	pll. lin.	°
1843 Gennajo 1	68 28 36,92	− 2,12	68 28 34,80	27 5,63	+ 10,0
	68 28 37,83	− 5,13	68 28 32,70		
	68 29 10,13	− 38,25	68 28 31,88		
2	68 23 31,65	− 2,75	68 23 28,90	27 5,55	+ 6,1
	68 23 32,46	− 4,56	68 23 27,90		
	68 24 4,86	− 36,50	68 23 28,36		
3	68 17 57,88	− 1,94	68 17 55,94	27 8,0	+ 4,2
	68 18 10,49	− 17,11	68 17 53,38		
	68 18 52,56	− 56,72	68 17 55,84		
4	67 11 59,91	− 3,94	68 11 55,97	27 11,78	+ 4,75
	68 12 6,39	− 11,59	68 11 54,80		
	68 12 30,69	− 36,24	68 11 54,45		
1843 Giugno 10	22 28 17,23	− 12,93	22 28 4,30	27 8,1	+ 19,9
11	22 23 43,15	− 15,90	22 23 27,25	27 7,1	+ 18,0
12	22 19 19,49	− 3,55	22 19 15,94	27 5,8	+ 18,6
	22 19 45,51	− 28,86	22 19 16,65		
14	22 12 16,37	− 6,75	22 12 9,62	27 8,2	+ 18,4
	22 12 36,52	− 27,84	22 12 8,68		
19	22 1 54,39	− 23,73	22 1 30,66	27 7,8	+ 17,2
20	22 0 48,58	− 11,27	22 0 37,31	27 7,1	+ 19,3
	22 1 4,47	− 26,52	22 0 37,95		
21	22 0 22,66	− 13,73	22 0 8,93	27 8,5	+ 19,7
	22 0 27,92	− 21,31	22 0 6,61		
22	22 0 20,33	− 16,06	22 0 4,27	27 8,7	+ 19,0
	22 0 25,49	− 19,85	22 0 5,64		
23	22 0 34,30	− 8,91	22 0 25,39	27 7,8	+ 20,5
	22 0 48,58	− 22,28	22 0 26,30		
24	22 1 14,70	− 2,09	22 1 12,61	27 6,4	+ 20,7
	22 1 46,49	− 35,92	22 1 10,57		
25	22 2 27,20	− 5,03	22 2 22,17	27 5,4	+ 19,2
	22 2 56,15	− 33,62	22 2 22,53		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	pell. lin.	°
1843 Giugno	26	22 4 18,77	− 19,00	22 3 59,77	27 6,2	+ 18,4
		22 4 8,55	− 10,06	22 3 58,49		
	27	22 6 22,20	− 21,81	22 6 0,39	27 7,7	+ 17,85
		22 6 9,39	− 9,41	22 5 59,98		
	30	22 14 57,36	− 30,20	22 14 27,16	27 8,5	+ 18,3
	1	22 18 21,17	− 13,12	22 18 8,05	27 9,8	+ 19,5
		22 18 22,08	− 16,80	22 18 5,28		
1843 Luglio	2	22 22 24,88	− 15,43	22 22 9,45	27 10,7	+ 19,5
		22 22 23,06	− 16,05	22 22 7,01		
	3	22 26 48,33	− 14,97	22 26 33,36	27 9,8	+ 22,0
		22 27 5,95	− 30,23	22 26 35,72		
	4	22 31 32,64	− 8,39	22 31 24,25	27 10,4	+ 23,4
		22 31 48,34	− 22,75	22 31 25,59		
1843 Dicembre	5	68 46 23,74	− 11,18	68 46 12,56	27 11,55	+ 5,5
		68 46 24,45	− 6,13	68 46 18,32		
		68 47 29,35	− 67,82	68 46 21,53		
	6	68 54 9,29	− 16,27	68 53 53,02	27 10,42	+ 7,7
		68 53 57,24	− 3,08	68 53 54,16		
		68 54 41,39	− 48,50	68 53 52,89		
	7	68 1 12,72	− 14,52	68 0 58,20	27 11,19	+ 6,8
		68 1 0,47	− 1,70	68 0 58,77		
		68 1 30,03	− 32,47	68 0 57,56		
	8	68 8 8,86	− 28,32	68 7 40,54	27 9,90	+ 6,5
		68 7 41,82	− 1,23	68 7 40,59		
		68 7 56,71	− 17,66	68 7 39,05		
	9	68 14 27,73	− 31,34	68 13 56,39	27 8,40	+ 9,7
		68 13 58,57	− 1,29	68 13 57,28		
		68 14 12,75	− 14,72	68 13 58,03		
	16	68 45 6,13	− 16,99	68 44 49,14	27 10,90	+ 8,1
		68 44 49,32	− 1,87	68 44 47,45		
		68 45 18,58	− 29,94	68 44 48,64		

Anno e giorno.		Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
		° ′ ″	″	° ′ ″	poll. lin.	°
1843 Dicembre	17	68 47 40,74	− 18,40	68 47 22,34	27 11,02	+ 6,3
		68 47 23,73	+ 0,20	68 47 23,93		
		68 47 49,75	− 24,34	68 47 25,41		
	24	68 52 27,07	− 18,08	68 52 8,99	28 1,60	+ 1,86
		68 52 11,68	− 2,86	68 52 8,82		
		68 52 42,46	− 30,74	68 52 11,72		
	25	68 51 20,45	− 19,41	68 51 1,04	28 1,75	+ 3,7
		68 51 2,23	− 1,21	68 51 1,02		
		68 51 28,96	− 25,30	68 51 3,66		
	26	68 49 23,10	− 7,47	68 49 15,63	28 2,46	+ 2,9
		68 49 21,99	− 4,85	68 49 17,14		
		68 49 55,10	− 36,17	68 49 18,93		
	27	68 47 21,00	− 10,70	68 47 10,30	28 1,76	+ 3,4
		68 47 15,02	− 5,66	68 47 9,36		
		68 47 49,25	− 38,96	68 47 10,29		
	28	68 44 44,77	− 8,95	68 44 35,82	28 1,20	+ 5,2
		68 44 44,87	− 9,22	68 44 35,65		
		68 45 28,91	− 49,04	68 44 39,87		
	29	68 41 37,15	− 4,12	68 41 33,03	28 1,22	+ 6,5
		68 41 50,31	− 16,54	68 41 33,77		
	30	68 38 19,51	− 18,28	68 38 1,23	28 1,00	+ 3,9
		68 38 5,33	− 1,58	68 38 3,75		
		68 38 29,84	− 28,13	68 38 1,71		
	31	68 34 23,80	− 26,71	68 33 57,09	27 11,45	+ 5,0
		68 34 4,16	− 1,40	68 34 2,76		
		68 34 26,43	− 24,71	68 34 1,72		
1844 Gennajo	1	68 29 50,53	− 14,92	68 29 35,61	27 9,86	+ 3,3
		68 29 35,14	+ 1,92	68 29 37,06		
		68 29 52,87	− 20,71	68 29 32,16		
	3	68 19 35,43	− 10,26	68 19 25,17	27 6,44	+ 5,1
		68 19 26,98	− 5,89	68 19 21,04		
		68 19 56,49	− 34,94	68 19 21,55		

Anno e giorno.	Arco semplice osservato.	Riduzione totale.	Arco ridotto.	Barom. corretti dall'errore delle scale.	Term. corretti dall'errore delle scale.
	° ′ ″	″	° ′ ″	poll. lin.	°
1844 Giugno 8	22 34 31,75	− 10,40	22 34 21,35	27 11,80	+ 22,9
	22 34 36,01	− 13,63	22 34 22,38		
9	22 29 30,23	− 15,03	22 29 15,20	27 11,45	22,4
	22 29 31,45	− 14,11	22 29 17,34		
10	22 24 51,09	− 16,28	22 24 34,81	27 11,19	21,2
	22 24 49,35	− 14,45	22 24 34,90		
11	22 20 21,86	− 3,50	22 20 18,36	27 11,37	21,5
	22 20 36,95	− 18,88	22 20 18,07		
12	22 16 38,20	− 9,62	22 16 28,58	27 11,25	22,7
	22 16 55,61	− 28,35	22 16 27,26		
13	22 13 8,51	− 7,39	22 13 1,12	27 11,48	24,1
	22 13 22,28	− 21,93	22 13 0,35		
14	22 10 6,97	− 6,60	22 10 0,37	27 10,62	25,05
	22 10 16,69	− 18,16	22 9 58,53		
15	22 7 31,15	− 8,58	22 7 22,57	27 9,53	24,9
	22 7 35,00	− 16,97	22 7 18,03		
16	22 5 17,30	− 11,63	22 5 5,67	27 8,30	24,4
	22 5 22,46	− 16,14	22 5 6,32		
17	22 3 30,98	− 14,58	22 3 16,40	27 9,95	21,8
	22 3 32,70	− 15,02	22 3 17,68		
18	22 2 8,97	− 16,24	22 1 52,73	27 9,07	22,25
	22 2 5,93	− 12,87	22 1 53,06		
20	22 0 46,05	− 28,25	22 0 17,80	27 9,40	19,3
	22 0 36,22	− 15,06	22 0 21,16		
21	22 0 16,68	− 9,36	22 0 7,32	27 11,20	21,1
	22 0 47,57	− 39,38	22 0 8,19		
22	22 0 36,33	− 10,41	22 0 25,92	27 10,80	22,2
	22 0 44,02	− 19,51	22 0 24,51		
23	22 1 21,68	− 12,65	22 1 9,03	27 10,33	20,5
	22 1 39,51	− 36,84	22 1 2,67		

SOLSTIZIO D'ESTATE 1838.

Giorni. 1838.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. − parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	″	″	′ ″	° ′ ″
Giugno 7	22 42 55,38	+ 19,81	− 0,57	− 42 58,42	22 0 16,20
8	22 37 14,55	19,48	− 0,61	− 37 15,92	0 17,50
9	22 31 52,27	19,93	− 0,62	− 31 57,50	0 14,08
10	22 26 58,11	20,01	− 0,61	− 27 3,16	0 14,35
13	22 14 42,85	19,53	− 0,39	− 14 45,95	0 16,04
14	22 11 25,23	19,39	− 0,28	− 11 29,11	0 15,23
15	22 8 30,61	19,10	− 0,14	− 8 36,85	0 12,72
18	22 2 23,10	18,72	+ 0,26	− 2 28,18	0 13,90
19	22 1 9,49	18,86	+ 0,37	− 1 14,84	0 13,88
20	22 0 21,15	18,90	+ 0,47	− 0 26,28	0 14,24
21	21 59 58,21	18,75	+ 0,55	− 0 2,61	0 14,90
22	21 59 57,88	18,73	+ 0,59	− 0 3,69	0 13,51
23	22 0 25,77	18,43	+ 0,59	− 0 29,66	0 15,13
24	22 1 14,57	18,64	+ 0,58	− 1 20,42	0 13,37
25	22 2 35,32	18,79	+ 0,54	− 2 36,00	0 18,65
26	22 4 11,00	18,75	+ 0,47	− 4 16,30	0 13,92
27	22 6 14,79	18,70	+ 0,36	− 6 21,28	0 12,57
28	22 8 46,34	19,04	+ 0,25	− 8 50,90	0 14,73
29	22 11 40,78	19,71	+ 0,13	− 11 45,08	0 15,54
Luglio 3	22 27 19,23	19,67	− 0,35	− 27 25,44	0 13,11
4	22 32 16,53	19,40	− 0,42	− 32 20,96	0 14,55
5	22 37 37,75	19,49	− 0,46	− 37 40,40	0 16,38
				Medio	22 0 14,75
				Flessione del circolo	+ 0,53
					22 0 15,28
				Latitudine della specola	45 28 0,70
				Obbliquità apparente	23 27 45,42

SOLSTIZIO D'INVERNO 1838.

Giorni. 1838.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. − parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	′ ″	″	′ ″	° ′ ″
Dicem. 10	68 21 4,10	+2 17,94	+ 0,07	+32 25,04	68 55 47,15
11	68 26 26,27	2 20,18	− 0,07	27 10,14	56,52
12	68 31 10,27	2 22,22	− 0,20	22 22,57	54,86
13	68 35 31,45	2 22,64	− 0,31	18 2,51	56,29
14	68 39 22,27	2 23,40	− 0,40	14 10,14	55,41
16	68 45 31,19	2 25,29	− 0,49	7 48,98	44,97
17	68 48 0,06	2 25,22	− 0,51	5 20,42	45,13
19	68 51 32,43	2 24,90	− 0,43	1 47,78	44,68
20	68 52 36,10	2 25.60	− 0,35	0 43,80	45,15
22	68 53 16,23	2 27,25	− 0,12	0 0,83	44,19
31	68 33 16,42	2 21,06	+ 0,57	20 5,83	43,88
1839 Genn. 1	68 28 43,05	2 20,77	+ 0,54	24 39,72	44,08
3	68 18 20,70	2 15,08	+ 0,38	35 10,16	46,32
4	68 12 20,15	2 18,39	+ 0,26	41 6,40	45,20
6	67 59 8,11	2 15,35	+ 0,00	54 20,23	43,69
				Medio	68 55 47,83
				Flessione del circolo	+ 1,30
					68 55 49,13
				Latitudine della specola	45 28 0,70
				Obbliquità apparente	23 27 48,43

SOLSTIZIO D'ESTATE 1838.

Giorni. 1838.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. − parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	″	″	′ ″	° ′ ″
Giugno 7	22 42 55,38	+ 19,81	− 0,57	− 42 58,42	22 0 16,20
8	22 37 14,55	19,48	− 0,61	− 37 15,92	0 17,50
9	22 31 52,27	19,93	− 0,62	− 31 57,50	0 14,08
10	22 26 58,11	20,01	− 0,61	− 27 3,16	0 14,35
13	22 14 42,85	19,53	− 0,39	− 14 45,95	0 16,04
14	22 11 25,23	19,39	− 0,28	− 11 29,11	0 15,23
15	22 8 30,61	19,10	− 0,14	− 8 36,85	0 12,72
18	22 2 23,10	18,72	+ 0,26	− 2 28,18	0 13,90
19	22 1 9,49	18,86	+ 0,37	− 1 14,84	0 13,88
20	22 0 21,15	18,90	+ 0,47	− 0 26,28	0 14,24
21	21 59 58,21	18,75	+ 0,55	− 0 2,61	0 14,90
22	21 59 57,88	18,73	+ 0,59	− 0 3,69	0 13,51
23	22 0 25,77	18,43	+ 0,59	− 0 29,66	0 15,13
24	22 1 14,57	18,64	+ 0,58	− 1 20,42	0 13,37
25	22 2 35,32	18,79	+ 0,54	− 2 36,00	0 18,65
26	22 4 11,00	18,75	+ 0,47	− 4 16,30	0 13,92
27	22 6 14,79	18,70	+ 0,36	− 6 21,28	0 12,57
28	22 8 46,34	19,04	+ 0,25	− 8 50,90	0 14,23
29	22 11 40,78	19,71	+ 0,13	− 11 45,08	0 15,54
Luglio 3	22 27 19,23	19,67	− 0,35	− 27 25,44	0 13,11
4	22 32 16,53	19,40	− 0,42	− 32 20,96	0 14,55
5	22 37 37,75	19,49	− 0,46	− 37 40,40	0 16,38
			Medio		22 0 14,75
			Flessione del circolo		+ 0,53
					22 0 15,28
			Latitudine della specola		45 28 0,70
			Obbliquità apparente		23 27 45,42

SOLSTIZIO D'INVERNO 1838.

Giorni. 1838.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. − parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	′ ″	″	′ ″	° ′ ″
Dicem. 10	68 21 4,10	+2 17,94	+ 0,07	+32 25,04	68 55 47,15
11	68 26 26,27	2 20,18	− 0,07	27 10,14	56,52
12	68 31 10,27	2 22,22	− 0,20	22 22,57	54,86
13	68 35 31,45	2 22,64	− 0,31	18 2,51	56,29
14	68 39 22,27	2 23,40	− 0,40	14 10,14	55,41
16	68 45 31,19	2 25,29	− 0,49	7 48,98	44,97
17	68 48 0,00	2 25,22	− 0,51	5 20,42	45,13
19	68 51 32,43	2 24,90	− 0,43	1 47,78	44,68
20	68 52 36,10	2 25,60	− 0,35	0 43,80	45,15
22	68 53 16,23	2 27,25	− 0,12	0 0,83	44,19
31	68 33 16,42	2 21,06	+ 0,57	20 5,83	43,88
1839 Genn. 1	68 28 43,05	2 20,77	+ 0,54	24 39,72	44,08
3	68 18 20,70	2 15,08	+ 0,38	35 10,16	46,32
4	68 12 20,15	2 18,39	+ 0,26	41 6,40	45,20
6	67 59 8,11	2 15,35	+ 0,00	54 20,23	43,69
				Medio	68 55 47,83
				Flessione del circolo	+ 1,30
					68 55 49,13
				Latitudine della specola	45 28 0,70
				Obbliquità apparente	23 27 48,43

SOLSTIZIO D'ESTATE 1839.

Giorni. 1839.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	″	″	′ ″	° ′ ″
Giugno 6	22 50 32,05	+ 19,99	− 0,01	− 50 36,74	22 0 15,29
7	22 44 17,95	19,66	+ 0,11	− 44 24,41	13,31
8	22 38 29,63	19,36	+ 0,21	− 38 35,94	13,26
9	22 33 7,31	19,28	+ 0,30	− 33 11,48	15,41
10	22 28 6,50	19,66	+ 0,36	− 28 11,17	15,35
11	22 23 30,37	19,14	+ 0,39	− 23 35,10	14,80
12	22 19 19,47	19,31	+ 0,39	− 19 23,39	15,78
13	22 15 30,75	17,93	+ 0,37	− 15 36,11	12,94
14	22 12 7,93	17,90	+ 0,30	− 12 13,38	12,75
15	22 9 10,15	17,90	+ 0,22	− 9 15,25	13,02
16	22 6 36,36	18,77	+ 0,12	− 6 41,80	13,45
17	22 4 27,65	18,70	+ 0,01	− 4 33,05	13,31
18	22 2 45,45	18,60	− 0,12	− 2 49,07	14,86
19	22 1 25,43	18,58	− 0,25	− 1 29,88	13,88
20	22 0 31,65	18,46	− 0,37	− 0 35,51	14,23
21	22 0 2,40	18,46	− 0,49	− 0 5,84	14,33
22	21 59 56 78	18,55	− 0,58	− 0 1,15	13,60
23	22 0 13,46	18,52	− 0,65	− 0 21,21	10,12
24	22 1 2,55	18,49	− 0,70	− 1 6,04	14,30
25	22 2 13,19	18,48	− 0,71	− 2 15,61	15,35
26	22 3 46,18	18,48	− 0 70	− 3 49,90	14,06
27	22 5 46,83	18,40	− 0,67	− 5 48,86	15,70
28	22 8 6,57	18,62	− 0,59	− 8 12,44	12,16
29	22 10 57,54	18,86	− 0,49	− 11 0,59	15,32
30	22. 14 10,04	19,13	− 0,36	− 14 13,25	15,56
Luglio 1	22 17 47,88	19,05	− 0,23	− 17 50,33	16,37
2	22 21 51,26	19,18	− 0,09	− 21 51,68	18,67
3	22 26 12,75	19,36	+ 0,04	− 26 17,34	14,81
4	22 31 3,29	19,57	+ 0,16	− 31 7,12	15,90
5	22 36 16,66	19,73	+ 0,27	− 36 20,90	15,76
6	22 41 53,61	19,68	+ 0,37	− 41 58,58	15,08
7	22 47 56,88	19,46	+ 0,44	− 48 0,00	16,78
				Medio	22 0 14,55
				Flessione del circolo	0,53
					22 0 15,08
				Latitudine della specola.	45 28 0,70
				Obbliquità apparente	23 27 45,62

SOLSTIZIO D' INVERNO 1839.

Giorni. 1839.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. − parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	′ ″	″	′ ″	° ′ ″
Dicem. 20	68 52 23,63	+2 22,38	+ 0,91	+ 0 56,65	68 55 43,57
29	68 41 54,49	2 18,35	− 0,06	+ 11 32,88	45,66
30	68 38 19,60	2 20,58	− 0,14	+ 15 4,49	44,53
31	68 34 22,93	2 21,46	− 0,20	+ 19 4,08	48,27
1840					
Genn. 1	68 29 57,26	2 21,50	− 0,26	+ 23 31,75	50,25
7	67 53 38,56	2 16,22	+ 0,10	+ 59 52,01	46,89
8	67 45 56,79	2 16,77	+ 0,23	+ 67 29,71	43,50
9	67 37 56,53	2 17,65	+ 0,36	+ 75 33,67	48,21
			Medio		68 55 46,36
			Flessione del circolo		1,30
					68 55 47,66
			Latitudine della specola		45 28 0,70
			Obbliquità apparente		23 27 46,96

SOLSTIZIO D'ESTATE 1841.

Giorni. 1841.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	″	″	′ ″	° ′ ″
Giugno 6	22 47 15,55	+ 19,55	− 0,48	−47 19,68	22 0 14,94
7	22 41 17,51	+ 19,53	− 0,36	−41 20,06	22 0 16,62
8	22 35 41,85	+ 20,09	− 0,23	−35 44,30	22 0 17,41
9	22 30 30,75	+ 19,36	− 0,10	−30 32,58	22 0 17,43
10	22 25 42,19	+ 19,30	+ 0,02	−25 45,00	22 0 16,51
12	22 17 19,63	+ 19,08	+ 0,23	−17 22,72	22 0 16,22
13	22 13 46,40	+ 19,12	+ 0,30	−13 48,18	22 0 17,64
15	22 7 51,44	+ 19,98	+ 0,35	− 7 52,86	22 0 18,91
16	22 5 31,45	+ 19,05	+ 0,33	− 5 32,16	22 0 18,67
17	22 3 34,20	+ 19,20	+ 0,29	− 3 36,20	22 0 17,49
20	22 0 15,34	+ 18,90	0,00	− 0 17,08	22 0 17,16
21	21 59 59,73	+ 19,12	− 0,14	− 0 0,37	22 0 18,34
22	22 0 6,73	+ 18,87	− 0,29	− 0 8,50	22 0 16,81
23	22 0 39,50	+ 18,77	− 0,42	− 0 41,44	22 0 16,41
24	22 1 38,16	+ 18,75	− 0,53	− 1 39,14	22 0 17,24
25	22 3 2,51	+ 18,90	− 0,64	− 3 1,62	22 0 19,15
26	22 4 46,18	+ 18,77	− 0,75	− 4 48,82	22 0 15,38
27	22 7 1,13	+ 18,64	− 0,83	− 7 0,66	22 0 18,28
28	22 9 36,50	+ 18,70	− 0,87	− 9 37,06	22 0 17,27
30	22 16 2,75	+ 18,93	− 0,85	−16 3,37	22 0 17,46
Luglio 1	22 19 51,82	+ 19,40	− 0,78	−19 53,08	22 0 17,36
2	22 24 6,12	+ 19,27	− 0,70	−24 7,04	22 0 17,65
3	22 28 43,57	+ 19,17	− 0,61	−28 45,14	22 0 16,99
4	22 33 46,67	+ 19,32	− 0,49	−33 47,28	22 0 18,22
5	22 39 12,83	+ 19,28	− 0,35	−39 13,28	22 0 18,48
			Medio		22 0 17,36
			Flessione del circolo		+ 0,53
					22 0 17,89
			Latitudine della specola		45 28 0,70
			Obbliquità apparente		23 27 42,81

SOLSTIZIO D'INVERNO 1841.

Giorni. 1841.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. − parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	′ ″	″	′ ″	° ′ ″
Dicem. 5	67 50 12,13	+2 11,03	− 0,26	+63 17,62	68 55 40,52
6	67 57 32,03	+2 13,59	− 0,36	+55 55,92	41,18
8	68 10 54,78	+2 16,06	− 0,46	+42 31,96	42,34
9	68 16 56,16	+2 16,11	− 0,46	+36 30,18	41,99
10	68 22 29,32	+2 18,29	− 0,43	+30 55,44	42,62
11	68 27 40,59	+2 16,17	− 0,38	+25 47,99	44,37
12	68 32 15,52	+2 18,13	− 0,31	+21 7,90	41,24
13	68 36 25,86	+2 20,09	− 0,21	+16 55,46	41,20
24	68 51 54,86	+2 21.03	+ 0,75	+ 1 29,76	46,40
25	68 50 21,71	+2 22,62	+ 0,70	+ 2 55,20	40,23
26	68 48 28,19	+2 21,37	+ 0,61	+ 4 48,88	39,05
31	68 32 0,71	+2 18,73	+ 0,05	+21 18,66	38,15
1842 Genn. 1	68 27 23,41	+2 19,04	− 0,08	+26 0,25	42,62
6	67 57 7,23	+2 16,54	− 0,33	+56 19,00	42,44
				Medio	68 55 41,74
				Flessione del circolo	+ 1,30
					68 55 43,04
				Latitudine della specola	45 28 0,70
				Obbliquità apparente	23 27 42,34

SOLSTIZIO D'ESTATE 1842.

Giorni. 1842.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	″	″	′ ″	° ′ ″
Giugno 6	22 48 51,40	+ 19,48	+ 0,73	− 48 50,16	22 0 21,45
7	22 42 44,96	19,44	+ 0,65	− 42 44,46	20,59
8	22 37 5,91	19,14	+ 0,55	− 37 2,70	22,90
9	22 31 46,43	19,33	+ 0,43	− 31 44,97	21,22
10	22 26 53,21	19,19	+ 0,30	− 26 51,47	21,23
11	22 22 22,90	19,21	+ 0,16	− 22 22,23	20,04
13	22 14 39,51	18,85	− 0,11	− 14 57,00	21,25
14	22 11 22,82	18,55	− 0,22	− 11 21,21	19,94
16	22 6 6,10	18,77	− 0,37	− 6 3,46	21,04
17	22 4 4,20	18,66	− 0,41	− 4 1,67	20,78
18	22 2 26,54	18,77	− 0,42	− 2 24,59	20,30
19	22 1 14,77	18,82	− 0,40	− 1 12,34	20,85
20	22 0 27,53	18,68	− 0,31	− 0 24,84	21,06
22	22 0 6,04	18,88	− 0,17	− 0 4,23	20,52
23	22 0 31,92	18,89	− 0,06	+ 0 31,15	19,60
24	22 1 25,94	18,89	+ 0,07	− 1 22,79	22,11
25	22 2 41,12	18,97	+ 0,20	− 2 39,22	21,07
26	22 4 22,23	18,66	+ 0,32	− 4 20,32	20,89
27	22 6 26,76	18,53	+ 0,43	− 6 26,11	19,61
28	22 8 57,58	19,10	+ 0,53	− 8 56,50	20,71
29	22 11 50,83	19,04	+ 0,60	− 11 51,43	19,04
30	22 15 11,36	18,90	+ 0,65	− 15 10,89	20,02
Luglio 1	22 18 56,03	18,96	+ 0,67	− 18 54,74	20,92
2	22 23 4,11	18,39	+ 0,65	− 23 2,90	20,25
3	22 27 37,50	18,66	+ 0,60	− 27 35,28	21,48
4	22 32 32.67	19,16	+ 0,53	− 32 31,80	20,56
			Medio		22 0 20,75
			Flessione del circolo		+ 0,53
					22 0 21,28
			Latitudine della specola		45 28 0,70
			Obbliquità apparente		23 27 39,42

SOLSTIZIO D'INVERNO 1842.

Giorni. 1842.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	′ ″	″	′ ″	° ′ ″
Dicem. 9	68 15 23,36	+2 16,02	+ 0,25	+ 37 55,52	68 55 35,15
10	68 20 59,85	+2 18,55	+ 0,31	+ 32 14,34	32,85
11	68 26 13,67	+2 20,08	+ 0,35	+ 27 0,34	34,44
15	68 42 28,38	+2 24,66	+ 0,17	+ 10 39,80	33,01
16	68 45 28,09	+2 25,49	+ 0,06	+ 7 44,16	34,80
17	68 47 54,64	+2 22,69	+ 0,06	+ 5 16,52	32,79
19	68 51 24,08	+2 23,66	+ 0,31	+ 1 45,60	32,99
20	68 52 29,29	+2 23,56	+ 0,44	+ 0 42,46	34,87
21	68 53 6,04	+2 24,06	+ 0,55	+ 0 7,60	37,14
22	68 53 8,06	+2 24,90	+ 0,65	+ 0 1,04	35,35
23	68 52 48,91	+2 22,35	+ 0,72	+ 0 22,80	33,34
29	68 40 49,10	+2 18,06	+ 0,52	+ 12 27,18	33,81
30	68 37 6,08	+2 22,04	+ 0,40	+ 16 6,38	34,10
31	68 33 2,08	+2 18,67	+ 0,27	+ 20 13,54	34,02
1843 0					
Genn. 1	68 28 33,13	+2 14,67	+ 0,15	+ 24 48,46	36,11
2	68 23 28,39	+2 16,89	+ 0,01	+ 29 51,06	36,33
3	68 17 55,05	+2 18,71	+ 0,12	+ 35 21,12	35,00
4	68 11 55,07	+2 19,33	+ 0,23	+ 41 18,50	33,13
				Medio	68 55 34,29
				Flessione del circolo	+ 1,30
					68 55 35,59
				Latitudine della specola	45 28 0,70
				Obbliquità apparente	23 27 34,89

SOLSTIZIO D'ESTATE 1843.

Giorni. 1843.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. — parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	″	″	′ ″	° ′ ″
Giugno 10	22 28 4,30	+ 19,39	+ 0,17	− 27 57,88	22 0 25,64
11	22 23 27,25	+ 19,40	+ 0,06	− 23 23,16	22 0 23,43
12	22 19 16,30	+ 19,19	+ 0,07	− 19 12,74	22 0 22,82
14	22 12 9,15	+ 19,25	+ 0,32	− 12 5,28	22 0 23,44
19	22 1 50,66	+ 19,18	+ 0,75	− 1 27,22	22 0 23,37
20	22 0 57,63	+ 18,91	+ 0,76	− 0 33,82	22 0 23,48
21	22 0 7,77	+ 18,96	+ 0,73	− 0 5,28	22 0 22,18
22	22 0 4,95	+ 19,04	+ 0,67	− 0 1,50	22 0 23,16
23	22 0 25,85	+ 18,83	+ 0,60	− 0 22,56	22 0 22,72
24	22 1 11,59	+ 18,73	+ 0,51	− 1 8,40	22 0 22,43
25	22 2 22,55	+ 18,84	+ 0,38	− 2 19,28	22 0 22,49
26	22 3 39,13	+ 18,99	+ 0,25	− 3 34,42	22 0 23,95
27	22 6 0,18	+ 19,18	+ 0,12	− 5 54,56	22 0 24,92
30	22 14 27,18	+ 19,33	− 0,25	− 14 22,50	22 0 23,74
Luglio 1	22 18 6,66	+ 19,36	− 0,34	− 18 0,76	22 0 24,92
2	22 22 8,23	+ 19,44	− 0,42	− 22 3,32	22 0 23,94
3	22 26 34,34	+ 19,25	− 0,43	− 26 30,08	22 0 23,28
4	22 31 24,92	+ 19,22	− 0,43	− 31 20,92	22 0 22,79
				Medio	22 0 23,48
				Flessione del circolo	0,53
					22 0 24,01
				Latitudine della specola	45 28 0,70
				Obbliquità apparente	23 27 36,69

SOLSTIZIO D' INVERNO 1843.

Giorni. 1843.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. – parall.	Latitud. del Sole.	Ridezione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	′ ″	″	′ ″	° ′ ″
Dicem. 5	67 46 17,47	+ 2 15,22	– 0,10	+ 67 2,98	68 55 35,57
6	67 53 53,36	+ 2 14,46	– 0,22	+ 59 28,66	36,26
7	68 0 58,18	+ 2 14,70	– 0,35	+ 52 20,66	33,19
8	68 7 40,06	+ 2 16,69	– 0,48	+ 45 39,22	35,49
9	68 13 57,23	+ 2 14,52	– 0,61	+ 39 24,48	35,62
16	68 44 48,41	+ 2 20,56	– 0,84	+ 8 25,12	33,25
17	68 47 23,89	+ 2 22,14	– 0,76	+ 5 50,48	35,75
24	68 52 9,84	+ 2 27,31	+ 0,07	+ 0 58,00	35,22
25	68 51 1,91	+ 2 25,78	+ 0,15	+ 2 9,52	37,36
26	68 49 17,22	+ 2 26,56	+ 0,20	+ 3 49,30	33,28
27	68 47 9,98	+ 2 25,60	+ 0,22	+ 5 57,32	33,12
28	68 44 37,11	+ 2 23,98	+ 0,22	+ 8 33,56	34,87
29	68 41 33,40	+ 2 22,28	+ 0,21	+ 11 37,86	33,75
30	68 38 2,23	+ 2 23,65	+ 0,14	+ 15 10,16	36,18
31	68 34 0,52	+ 2 22,57	+ 0,05	+ 19 10,38	32,52
1844 Genn. 1	68 29 34,95	+ 2 22,50	– 0,04	+ 23 38,30	34,71
3	68 19 22,59	+ 2 17,54	– 0,29	+ 33 56,96	36,80
			Media		68 55 34,88
			Flessione del circolo		+ 1,30
					68 55 36,18
			Latitudine della specola		45 28 0,70
			Obbliquità apparente		23 27 35,48

SOLSTIZIO D'ESTATE 1844.

Giorni. 1844.	Dist. appar. del Sole dal vertice.	Rifraz. parall.	Latitud. del Sole.	Riduzione al solstizio.	Distanza dell'eclittica dal vertice nel solstizio.
	° ′ ″	″	″	′ ″	° ′ ″
Giugno 8	22 34 21,86	+ 19,39	+ 0,86	− 34 13,62	22 0 28,49
9	22 29 16,27	19,33	+ 0,84	− 29 8,66	27,78
10	22 24 34,86	10,37	+ 0,78	− 24 27,86	27,15
11	22 20 18,21	19,28	+ 0,71	− 20 11,40	26,80
12	22 16 27,92	19,09	+ 0,62	− 16 19,32	28,31
13	22 13 0,73	18,92	+ 0,50	− 12 51,74	28,41
14	22 9 59,45	18,72	+ 0,36	− 9 48,74	29,79
15	22 7 20,30	18,63	+ 0,23	− 7 10,34	28,82
16	22 5 6,00	18,56	+ 0,11	− 4 56,72	27,95
17	22 3 17,04	18,89	0,00	− 3 7,80	28,13
18	22 1 52,90	18,76	− 0,11	− 1 43,68	27,87
20	22 0 19,48	19,04	− 0,23	− 0 9,84	28,45
21	22 0 7,75	19,00	− 0,25	− 0 0,16	26,34
22	22 0 25,21	18,86	− 0,24	− 0 15,30	28,53
23	22 1 5,85	19,01	− 0,21	− 0 55,22	29,43
24	22 2 10,27	18,97	− 0,14	− 1 59,94	29,16
25	22 3 39,73	18,77	− 0,06	− 3 29,34	29,10
27	22 7 50,90	18,82	+ 0,20	− 7 42,78	27,74
28	22 10 33,54	18,88	+ 0,33	− 10 25,44	27,31
29	22 13 40,25	19,12	+ 0,45	− 13 33,18	26,64
30	22 17 13,89	18,94	+ 0,58	− 17 5,34	28,07
Luglio 1	22 21 9,71	18,81	+ 0,69	− 21 1,82	27,39
2	22 25 31,30	19,06	+ 0,78	− 25 22,50	28,64
3	22 30 15,65	19,17	+ 0,86	− 30 7,30	28,38
4	22 35 23,96	19,26	+ 0,90	− 35 16,14	27,98
			Medio		22 0 28,11
			Flessione del circolo		0,53
					22 0 28,64
			Latitudine della specola.		45 28 0,70
			Obbliquità apparente		23 27 32,06

Avendosi ora una serie di osservazioni solstiziali continuate pel corso di 34 anni ed istituite nel medesimo luogo e collo stesso stromento, potremo dal loro confronto dedurre alcuna non inutile conseguenza. E prima di tutto ci gioverà esaminare se il circolo moltiplicatore adoperato, col lungo uso e colla lunga esposizione alle impressioni dell'aria, abbia sofferto qualche deterioramento, cosicchè le osservazioni eseguite in questi ultimi tempi presentino un accordo meno soddisfacente, o se per lo contrario i piccoli cangiamenti sì nella macchina, sì nell'uso di essa, che la lunga esperienza ci ha di mano in mano suggeriti, abbiano concorso a diminuire gli errori accidentali che combinandosi diversamente fra loro danno luogo alle discordanze fra le singole determinazioni e il valore che risulta dal medio d'un numero considerabile di esse. A questo fine, per non estendermi soverchiamente, mi sono limitato a cercare la somma delle differenze col valor medio delle distanze solstiziali, in due dei primi anni della serie d'osservazioni dell'astronomo Oriani, ed in due degli ultimi, preferendo quelli in cui il numero delle osservazioni era più considerabile, e ciò tanto pel solstizio estivo che pel solstizio jemale; e la stessa ricerca feci per rispetto alle mie osservazioni registrate in questo ed in alcuni precedenti volumi delle nostre Effemeridi. Chiamando δ la differenza fra la *distanza meridiana dell'eclittica dallo zenit nel solstizio* che risulta dalle osservazioni di ciascun giorno, e il medio di tutte che trovasi scritto a piedi della colonna, con $\Sigma\delta$ la somma di tutte queste differenze, astrazion fatta dal segno, con $\Sigma\delta^2$ la somma dei quadrati delle differenze medesime, con n il numero delle osservazioni, mi risultarono i valori registrati nella seguente tabella.

Da essi si rileva prima di tutto che l'accordo delle osservazioni è sempre notabilmente maggiore presso il solstizio estivo che presso il solstizio jemale; si vede poi che gli errori medj nelle osservazioni invernali sono alquanto diminuiti, mentre nelle estive sono rimasti prossimamente i medesimi.

Osservazioni Oriani.

Anni.	Solstizio.	n	$\Sigma\delta$	$\Sigma\delta^2$	$\frac{\Sigma\delta}{n}$	$\sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{n}}$
			"		"	
1810	Jemale	14	16,91	31,78	1,208	1,507
1811		15	20,80	52,98	1,387	1,880
1827		16	28,84	66,77	1,803	2,043
1828		16	23,06	44,42	1,442	1,666
1813	Estivo	16	11,66	13,19	0,729	0,908
1814		20	17,97	23,25	0,899	1,078
1828		27	24,18	27,72	0,896	1,013
1829		26	20,42	26,37	0,785	1,007
Osservazioni Carlini.						
1832	Jemale	17	16,58	22,90	0,975	1,161
1833		21	22,62	47,14	1,078	1,498
1842		18	19,03	28,54	1,057	1,259
1843		17	20,68	33,77	1,217	1,410
1831	Estivo	25	18,80	19,10	0,752	0,874
1832		24	23,32	35,31	0,972	1,213
1843		18	15,38	18,14	0,855	1,004
1844		25	16,51	17,51	0,660	0,837

Per inoltrarci al confronto delle osservazioni dei diversi anni fra loro converrebbe presupporre cognito il valore del coefficiente della nutazione e quello della diminuzione annua dell'obbliquità dell'eclittica, ma si può ancora considerare queste due quantità come incognite, e dedurle dal complesso delle osservazioni solstiziali medesime. Noi faremo uso a questo fine delle sole fatte nel solstizio estivo, che abbiamo veduto essere le più sicure, e per non introdurre nel calcolo la latitudine geografica dell'osservatorio, che è un elemento estraneo a tale ricerca, opreremo immediatamente sui valori medj della *distanza meridiana dell'eclittica dal vertice*. Prima di tutto però, a fine di rendere le osservazioni dal 1811 al 1829 comparabili colle susseguenti conviene applicare alle prime, due piccole correzioni dipendenti l'una dalla flessione del circolo, l'altra dall'errore delle scale del barometro e del termometro che sono stati adoperati pel calcolo delle rifrazioni, come si è già praticato per riguardo alle distanze dallo zenit delle stelle circompolari osservate dall'Oriani, e da noi applicate alla ricerca delle rifrazioni nell'Appendice alle Effemeridi dell'anno 1836, pag. 27. Queste due correzioni nel caso attuale sono rispettivamente $+0'',53$ e $+0'',04$, la cui somma deve aggiungersi alle distanze dallo zenit del Sole nel solstizio per gli anni sopra indicati.

L'espressione della nutazione dell'obbliquità dell'eclittica usata nelle moderne tavole è composta di quattro termini, di cui il solo primo, che ha per argomento la longitudine del nodo della Luna, può essere soggetto di pratica determinazione, poichè gli altri tre hanno coefficienti tanto piccoli che possono unicamente essere stabiliti per mezzo della teoria. La seconda inegualianza poi che ha per argomento il doppio della longitudine del Sole può ritenersi come quantità costante non solo nell'istante di ciascun solstizio, ma anche in tutto l'intervallo di tempo, durante il quale si sogliono dagli astronomi

istituire le osservazioni solstiziali. Possiamo perciò ommettere per ora di considerarla, ritenendola come compenetrata col termine costante che risulterà dalle equazioni. Molto variabile al contrario è la terza ineguaglianza che dipende dal doppio della longitudine della Luna, giacchè l'argomento di essa nel suddetto intervallo percorre più di due circonferenze. È quindi inesatta la regola usata generalmente dai calcolatori, di applicare al medio delle distanze solstiziali dedotte da una serie di più giorni d'osservazione quel valore della terza ineguaglianza di nutazione che ha luogo nell'istante del solstizio; siccome per rispetto alla latitudine del Sole fece già riflettere il più volte citato astronomo Orimi nell'Appendice alle Effemeridi per l'anno 1816, pag. 62. E poichè il massimo valore dell'ineguaglianza di cui si tratta non giunge ad una decima di secondo, ci avvicineremo bastantemente al vero supponendo che i valori corrispondenti ai diversi giorni si siano in gran parte compensati fra loro, e che quindi la somma di essi divisa pel numero delle osservazioni sia quantità al di sotto d'una centesima parte di secondo, e perciò affatto trascurabile. Resta adunque la quarta ineguaglianza, il cui valore, giusta i calcoli di Poisson, è eguale a $0'',0917 \cos 2\Omega$ con segno positivo quando si applica all'obbliquità apparente dell'eclittica per avere la media, e quindi di segno negativo quando si applica alla distanza solstiziale estiva. Noi abbiamo perciò applicata a tutta la serie delle osservazioni la correzione $0,0917 \cos 2\Omega$, lasciando solo sotto forma d'incognita la parte principale della nutazione che abbiamo indicata con $+ \nu \cos \Omega$. Chiamando inoltre ε la *distanza media dell'eclittica dal vertice nel solstizio* per un'epoca fissa, che abbiamo stabilita al giorno 21,5 di giugno dell'anno 1827 (compenetrata, come già si disse, nella stessa distanza media la nutazione solare), con n il numero degli anni trascorsi prima o dopo la suddetta epoca, con μ la diminuzione annua dell'obbliquità

dell'eclittica, con e la distanza solstiziale osservata in ciascun anno e corretta nel modo sopra indicato, si ebbero altrettante equazioni della forma

$$\varepsilon + \mu n - \nu \cos \Omega = e.$$

La longitudine poi del nodo si è ritenuta

$$= 7^s\ 11^\circ\ 55' - n \times 19^\circ\ 20',45.$$

Prendendo ora nei diversi volumi di queste Effemeridi i valori medj delle distanze dal vertice osservate e ridotte al solstizio, si ebbero le 33 equazioni seguenti. In esse manca quella corrispondente al solstizio dell'anno 1830, il quale fu sicuramente osservato dall'astronomo Oriani, ma non fu da lui reso pubblico, nè si ritrovò fra le sue carte.

Anni														
1811	ε	$-$	$16\,\mu$	$+$	$0{,}9887\,\nu$	$=$	22°	$0'$	$19'',53$	$-$	$0'',08$	$+$	$0'',57$	$=$ $20'',02$
12	ε	$-$	$15\,\mu$	$+$	$0{,}8832\,\nu$	$=$			$19{,}00$	$-$	$0{,}05$	$+$	$0{,}57$	$=$ $19{,}52$
13	ε	$-$	$14\,\mu$	$+$	$0{,}6780\,\nu$	$=$			$17{,}87$	$+$	$0{,}01$	$+$	$0{,}57$	$=$ $18{,}45$
14	ε	$-$	$13\,\mu$	$+$	$0{,}3963\,\nu$	$=$			$15{,}69$	$+$	$0{,}06$	$+$	$0{,}57$	$=$ $16{,}32$
15	ε	$-$	$12\,\mu$	$+$	$0{,}0699\,\nu$	$=$			$11{,}47$	$+$	$0{,}09$	$+$	$0{,}57$	$=$ $12{,}13$
16	ε	$-$	$11\,\mu$	$-$	$0{,}2644\,\nu$	$=$			$7{,}80$	$+$	$0{,}08$	$+$	$0{,}57$	$=$ $8{,}45$
17	ε	$-$	$10\,\mu$	$-$	$0{,}5689\,\nu$	$=$			$5{,}71$	$+$	$0{,}03$	$+$	$0{,}57$	$=$ $6{,}31$
18	ε	$-$	$9\,\mu$	$-$	$0{,}8092\,\nu$	$=$			$6{,}93$	$-$	$0{,}03$	$+$	$0{,}57$	$=$ $7{,}47$
19	ε	$-$	$8\,\mu$	$-$	$0{,}9581\,\nu$	$=$			$5{,}06$	$-$	$0{,}07$	$+$	$0{,}57$	$=$ $5{,}56$
20	ε	$-$	$7\,\mu$	$-$	$0{,}9989\,\nu$	$=$			$4{,}88$	$-$	$0{,}09$	$+$	$0{,}57$	$=$ $5{,}36$
21	ε	$-$	$6\,\mu$	$-$	$0{,}9269\,\nu$	$=$			$5{,}59$	$-$	$0{,}07$	$+$	$0{,}57$	$=$ $6{,}09$
22	ε	$-$	$5\,\mu$	$-$	$0{,}7503\,\nu$	$=$			$8{,}91$	$-$	$0{,}01$	$+$	$0{,}57$	$=$ $9{,}47$
23	ε	$-$	$4\,\mu$	$-$	$0{,}4890\,\nu$	$=$			$9{,}68$	$+$	$0{,}04$	$+$	$0{,}57$	$=$ $10{,}29$
24	ε	$-$	$3\,\mu$	$-$	$0{,}1725\,\nu$	$=$			$12{,}90$	$+$	$0{,}09$	$+$	$0{,}57$	$=$ $13{,}56$
25	ε	$-$	$2\,\mu$	$+$	$0{,}1633\,\nu$	$=$			$19{,}02$	$+$	$0{,}09$	$+$	$0{,}57$	$=$ $19{,}68$
26	ε	$-$	$1\,\mu$	$+$	$0{,}4810\,\nu$	$=$			$22{,}69$	$+$	$0{,}05$	$+$	$0{,}57$	$=$ $23{,}31$
27	ε	$-$	$0\,\mu$	$+$	$0{,}7441\,\nu$	$=$			$25{,}13$	$-$	$0{,}01$	$+$	$0{,}57$	$=$ $25{,}69$

Anni							
1828	$\varepsilon + 1\,\mu + 0{,}9234\,\nu =$	22° 0′	27″,37	− 0″,07	+ 0″,57	=	27″,87
29	$\varepsilon + 2\,\mu + 0{,}9984\,\nu =$		28,29	− 0,08	+ 0,57	=	28,78
31	$\varepsilon + 4\,\mu + 0{,}8148\,\nu =$		27,17	− 0,03	+ 0,00	=	27,14
32	$\varepsilon + 5\,\mu + 0{,}5768\,\nu =$		24,94	+ 0,03		=	24,97
33	$\varepsilon + 6\,\mu + 0{,}2737\,\nu =$		23,25	+ 0,08		=	23,33
34	$\varepsilon + 7\,\mu - 0{,}0603\,\nu =$		20,50	+ 0,09		=	20,59
35	$\varepsilon + 8\,\mu - 0{,}3875\,\nu =$		17,90	+ 0,06		=	17,96
36	$\varepsilon + 9\,\mu - 0{,}6711\,\nu =$		15,94	+ 0,01		=	15,95
37	$\varepsilon + 10\,\mu - 0{,}8787\,\nu =$		14,28	− 0,05		=	14,23
38	$\varepsilon + 11\,\mu - 0{,}9872\,\nu =$		15,28	− 0,09		=	15,19
39	$\varepsilon + 12\,\mu - 0{,}9843\,\nu =$		15,08	− 0,09		=	14,99
40	$\varepsilon + 13\,\mu - 0{,}8703\,\nu =$		15,74	− 0,05		=	15,69
41	$\varepsilon + 14\,\mu - 0{,}6580\,\nu =$		17,89	+ 0,01		=	17,90
42	$\varepsilon + 15\,\mu - 0{,}3715\,\nu =$		21,28	+ 0,07		=	21,35
43	$\varepsilon + 16\,\mu - 0{,}0430\,\nu =$		24,01	+ 0,09		=	24,10
44	$\varepsilon + 17\,\mu + 0{,}2903\,\nu =$		28,64	+ 0,08		=	28,72

Conservando, per compendio di calcolo, nel secondo membro delle equazioni la sola parte dei minuti secondi e centesimi di secondo, e trattandole col solito metodo de' minimi quadrati, si ottengono le tre

$$+ 33\,\varepsilon + 14\,\mu - 3{,}5682\,\nu = + 566'',44$$

$$+ 14\,\varepsilon + 3272\,\mu - 55{,}1993\,\nu = + 1265{,}29,$$

$$- 3{,}5682\,\varepsilon - 55{,}1993\,\mu + 15{,}5607\,\nu = + 57{,}87,$$

le quali danno $\varepsilon = 17'',9979$

$$\mu = 0{,}470848$$

$$\nu = 9{,}552522.$$

Il trovato valore di ε ci dà la *distanza media dell'eclittica dal vertice nel solstizio* pel 21 giugno 1827

$$= 22^\circ\ 0'\ 18'',00 - 0'',52 = 22^\circ\ 0'\ 17'',48,$$

essendo 0″,52 il valore della nutazione solare nell' istante del solstizio, che abbiamo ritenuta come costante; quindi se supponiamo la latitudine geografica dell' osservatorio di 45° 28′ 0″,70, verrà l' obbliquità media dell' eclittica per l' epoca suddetta di 23° 27′ 43″,22; e se adottiamo la latitudine che risultò dopo applicate alle osservazioni delle stelle circompolari le correzioni dipendenti dalla flessione dell' istromento e dall' errore delle scale del barometro e del termometro, cioè 43° 27′ 59″,69, sarà l' obbliquità media 23° 27′ 42″,21. Secondo le tavole Regiomontane dovrebb' essere 23° 27′ 42″,46.

La diminuzione annua dell' obbliquità risulta dalle nostre precedenti osservazioni di 0″,470848, ed è perfettamente d' accordo coi recenti computi del signor Peters, il quale introducendo nell' espressione data dalla teoria del signor Verrier i più certi valori delle masse dei pianeti, ha trovato una diminuzione annua di 0″,4738.

Il coefficiente della nutazione è risultato di 9″,3262 maggiore di quello che è stato dedotto dalle ascensioni rette e dalle declinazioni della stella polare istituite col circolo meridiano nell' osservatorio di Dorpat dall' anno 1822 al 1838; ed in vero pare che a questi ultimo (sebbene appoggiato ad una serie d' osservazioni che non abbraccia un intero periodo del nodo della Luna) debba accordarsi la preferenza. Nulla di meno è cosa importante il poter paragonare fra loro i valori delle costanti fondamentali dell' astronomia, quali risultano dalla discussione di fenomeni diversi, osservati colla maggior precisione e fra di loro affatto indipendenti.

Dal confronto dei valori di σ dati dalla formola

$$17'',9979 + 0'',470848\,n - 9'',552522\,\cos\Omega$$

con quelli immediatamente osservati si hanno le differenze qui sotto notate.

Anni.	Osservazioni Oriani. Valore di e calcolato.	Valore di e osservato.	Differenza	Anni.	Osservazioni Carlini. Valore di e calcolato.	Valore di e osservato.	Differenza
	"	"	"		"	"	"
1811	19,91	20,02	+ 0,11	1831	27,66	27,14	− 0,52
1812	19,37	19,52	+ 0,15	1832	25,86	24,97	− 0,89
1813	17,88	18,45	+ 0,57	1833	23,44	23,33	− 0,11
1814	15,66	16,32	+ 0,66	1834	20,72	20,59	− 0,13
1815	13,02	12,13	− 0,89	1835	18,06	17,96	− 0,10
1816	10,29	8,45	− 1,84	1836	15,83	15,95	+ 0,12
1817	7,86	6,31	− 1,57	1837	14,31	14,23	− 0,08
1818	6,03	7,47	+ 1,44	1838	13,75	15,19	+ 1,44
1819	5,08	5,56	+ 0,48	1839	14,25	14,99	+ 0,74
1820	5,16	5,36	+ 0,20	1840	15,80	15,69	− 0,11
1821	6,32	6,09	− 0,23	1841	18,30	17,90	− 0,40
1822	8,47	9,47	+ 1,00	1842	21,51	21,35	− 0,15
1823	11,44	10,29	− 1,15	1843	25,12	24,10	− 1,02
1824	14,93	13,56	− 1,37	1844	28.77	28,72	− 0,05
1825	18,62	19,68	+ 1,06			Valor medio	0,41
1826	22,12	23,31	+ 1,19				
1827	25,10	25,69	+ 0,59				
1828	27,29	27,87	+ 0,58				
1829	28,48	28,78	+ 0,30				
		Valor medio	0,80				

Sarebbe inutil fatica il voler ricercare le tre incognite per mezzo delle obbliquità dell'eclittica osservate nel solstizio jemale, le quali, come si è veduto, presentano errori probabili notabilmente maggiori; non sarà però inutile il paragonare le obbliquità jemali colle estive, onde porre in chiaro le cause che rendono meno certe le osservazioni delle altezze prese a maggiori distanze dal vertice. Per istituire una tale indagine senza farla dipendere dalla nutazione e dalla diminuzione dell'obbliquità, faremo uso delle obbliquità apparenti immediatamente osservate, e porremo a confronto ciascuna obbliquità estiva colla semisomma delle due obbliquità jemali precedente e seguente. E siccome chiamando a la longitudine del nodo della Luna nell'osservazione intermedia, ω il suo movimento

nell'intervallo di sei mesi, le tre obbliquità successive sarebbero affette dalle nutazioni

$$-\nu \cos(a-\omega)\,,\quad -\nu \cos a\,,\quad -\nu \cos(a+\omega)\,,$$

e quindi la semisomma delle due estreme differirebbe dalla media della quantità

$$-\nu \cos a + \frac{\nu \cos(a-\omega) + \nu \cos(a+\omega)}{2}\,,$$

abbiamo applicata alla semisomma delle obbliquità jemali una correzione di segno contrario, la quale si riduce a

$+ 2\nu \sin^2 \frac{1}{2}\omega \cos a$; quantità piccolissima, essendo $\frac{1}{2}\omega = 4^\circ\, 50'$.

Scorgesi, esaminando i numeri registrati nell'ultima colonna della tabella seguente, che nelle prime osservazioni dell'Oriani (ritenuta la latitudine geografica di $45^\circ\ 24'\ 0'',7$) l'obbliquità jemale era di soli due o tre secondi minore dell'estiva, ma che questa differenza andò successivamente crescendo sino a sette, indi tornò a diminuire. Nelle mie osservazioni all'opposito, cominciate l'anno 1831, l'obbliquità jemale era in principio maggiore dell'estiva di circa due secondi, ma in questi ultimi anni, rimanendo sempre assai piccola, andò oscillando ora in più ed ora in meno; il qual miglioramento pare che sia avvenuto in conseguenza del sostegno dato al filo orizzontale del micrometro per allontanare il pericolo del rallentamento di esso nei tempi di massima umidità. È però da osservarsi che la rigidità dei fili (e non solo dei metallici, ma ben anco di quelli sottilissimi di seta o di ragno) è spesso sufficiente ad impedire che le sinuosità procedenti dall'allentamento o dalla dilatazione obbediscano alla tendenza della gravità ed a conservarle in posizione invariabile per rispetto alle parti dell'anello del micrometro; il che succedendo non ha più a temersi un errore nelle osservazioni istituite cogli stromenti moltiplicatori, purchè s'abbia l'avvertenza di collimar sempre sull'astro con un punto identico del filo.

Anni.	Obbliquità apparente solst. estivo.	Anni.	Semisomma obbliquità precedente e seguente solst. jem.	Correzione.	Semisomma corretta.	Obbl. jemale meno obbl. estiva.
	° ′ ″		° ′ ″	″	° ′ ″	″
1811	23 27 41,17	1810; 11	23 27 39,22	− 0,13	23 27 39,09	− 2,08
1812	41,70	11; 12	38,89	− 0,12	38,77	− 2,93
1813	42,83	12; 13	39,87	− 0,09	39,78	− 3,05
1814	45,01	13; 14	41,90	− 0,05	41,85	− 3,16
1815	49,23	14; 15	43,42	− 0,01	43,41	− 5,82
1816	52,90	15; 16	47,02	+ 0,04	47,06	− 5,84
1817	54,99	16; 17	47,27	+ 0,07	47,34	− 7,65
1818	53,77	17; 18	50,52	+ 0,11	50,63	− 3,14
1819	55,64	18; 19	51,72	+ 0,13	51,85	− 3,79
1820	55,82	19; 20	50,86	+ 0,13	50,99	− 4,83
1821	55,11	20; 21	50,35	+ 0,13	50,48	− 4,63
1822	51,79	21; 22	47,22	+ 0,10	47,32	− 4,47
1823	51,02	22; 23	43,75	+ 0,07	43,82	− 7,20
1824	47,80	23; 24	42,98	+ 0,02	43,00	− 4,80
1825	41,68	24; 25	41,24	− 0,02	41,22	− 0,46
1826	38,01	25; 26	37,10	− 0,07	37,03	− 0,98
1827	35,57	26; 27	33,16	− 0,10	33,06	− 2,51
1828	33,33	27; 28	31,53	− 0,12	31,41	− 1,92
1831	33,53	30; 31	35,48	− 0,11	35,37	+ 1,84
1832	35,76	31; 32	36,26	− 0,08	36,18	+ 0,42
1833	37,45	32; 33	39,50	− 0,04	39,46	+ 2,01
1834	40,20	33; 34	43,28	+ 0,01	43,29	+ 3,09
1835	42,80	34; 35	44,94	+ 0,05	44,99	+ 2,19
1836	44,76	35; 36	45,18	+ 0,09	45,27	+ 0,51
1837	46,42	36; 37	43,21	+ 0,12	43,33	− 3,09
1838	45,42	37; 38	46,36	+ 0,13	46,49	+ 1,07
1839	45,62	38; 39	47,89	+ 0,13	48,01	+ 2,39
1840	44,96	39; 40	45,92	+ 0,12	46,04	+ 1,08
1841	42,81	40; 41	43,61	+ 0,09	43,70	+ 0,89
1842	39,42	41; 42	38,61	+ 0,05	38,66	− 0,76
1843	36,69	42; 43	35,18	− 0,01	35,17	− 1,52

GENESI

DELLE FUNZIONI SIMETRICHE

ED

ALTERNATE

DI

PAOLO FRISIANI.

1. In un determinato spazio si limitino con parentesi ( ) alcuni spazj parziali in esso compresi e siano questi contraddistinti con lettere poste in alto come $(\ )^z$, $(\ )^y \ldots . b)^h \ldots . (\ )^x$. Se si ha un numero di cose da distribuire nei detti spazj, la quistione di cercare le diverse distribuzioni che si possono fare nei prescritti luoghi sarà indeterminata insino a tanto che non si limiti la ricerca col fissare il numero degli spazj, la relazion di distribuzione di essi rapporto allo spazio intero, il numero delle cose e la loro specie, cioè di essere o tutte fra loro disuguali od alcune eguali ad alcune altre, e finalmente la condizione a cui dev' essere soggetta la soluzione che si cerca, cioè se ammettere o non ammettere distribuzioni identiche, se escludere o no nelle loro distribuzioni alcune predisposte combinazioni, e così dicasi successivamente.

2. Limitiamoci a considerare un numero fisso n di spazj da occuparsi da altrettante n cose. Ammetteremo di non aver alcun riguardo alla disposizione diversa di essi rispetto

allo spazio intero, ma soltanto alla variabilità della lettera che li contraddistingue. Ammetteremo che le n cose siano tutte diverse fra loro e contraddistinte da lettere progressive a, b, c . . . . y, z che chiameremo *basi*. Le stesse lettere che contraddistinguono gli spazj le chiameremo *indici*. Chiameremo *gruppo* una disposizione qualsivoglia delle n basi negli n luoghi designati. Limiteremo la ricerca alla formazione di tutti i gruppi possibili colla condizione che nessuna delle basi compaja ripetuta in un gruppo, e nessuna di esse esclusa, incominciando dalla determinazione del numero de' gruppi stessi.

3. Siccome la distribuzion degli spazj segnati da lettere rispetto allo spazio intero e riguardo alla successione de' loro indici è affatto arbitraria, ammetteremo per rappresentare un gruppo una successione lineare di spazj, uno a fianco all'altro, cioè $(\ )^p(\ )^q \ldots . (\ )^z(\ )^y$. Chiamisi *elemento* una base compresa in un determinato spazio ossia una base contraddistinta da un indice, come $(a)^p$, $(y)^a$ . . . . Siccome non si tien conto della relazione degli spazj parziali allo spazio intero, così si dovran considerare come eguali quei gruppi che nascono dall' alternare fra loro in qualsivoglia modo gli elementi che compongono il gruppo stesso. Così i diversi gruppi

$$(a)^a\,(b)^b\,(c)^c\,(d)^d \ldots . (y)^y\,(z)^z$$
$$(c)^c\,(b)^b\,(d)^d\,(a)^a \ldots . (z)^z\,(y)^y$$
$$(y)^y\,(c)^c\,(a)^a\,(b)^b \ldots . (z)^z\,(d)^d,$$

e così di seguito saranno gruppi eguali. Parimente i gruppi

$$(a)^d\,(c)^b\,(b)^c\,(d)^a \ldots . (z)^y\,(y)^z$$
$$(c)^b\,(b)^c\,(d)^a\,(a)^d \ldots . (y)^z\,(z)^y$$

e così di altri saranno pure eguali.

4. Chiameremo *elementi fissi* quelli in cui la base è eguale all' indice; *elementi variabili* gli altri. Un gruppo formato di *elementi fissi* si chiamerà *gruppo fondamentale* comunque siasi la successione degli elementi fissi, e *gruppo fondamentale ordinato* quello in cui gli elementi fissi sono disposti a seconda dell' ordine alfabetico.

5. Per ottenere il numero de' gruppi che avverino le condizioni del § 2 si dispongano gli spazj in numero n nell' ordine progressivo de' loro indici, cioè $(\ )^a(\ )^b(\ )^c \ldots (\ )^z$. Si prenda fra le n basi una qualsivoglia h, e si ponga successivamente negli spazj segnati a, b, $c \ldots\ldots z$. Ne risulteranno n disposizioni diverse secondo che h si troverà in uno degli spazj a, b, $c \ldots\ldots z$. In ciascuna di queste si mantenga fissa la posizione di h. Si pigli un' altra base k. In ciascuna disposizione già formata questa k non potrà occupare che $n-1$ spazj; si eseguisca tale disposizione. Il numero delle risultanti disposizioni diverse fra loro sarà $n(n-1)$, in ciascuna delle quali rimarranno ancora vuoti $n-2$ spazj. Si scelga una 3.ª base, e operato conformemente alle precedenti, ne risulteranno $n(n-1)(n-2)$ disposizioni tutte diverse fra loro; si progredisca così sino alla $(n-1)^{\text{esima}}$ base. Il numero delle disposizioni differenti fra loro che ne risulta sarà

$$n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\ldots\big(n-(n-2)\big).$$

In ciascuna di queste disposizioni rimarrà vuoto soltanto uno spazio unico. Messo in ciascun posto la n^{esima} ed ultima base, saranno tutti gli spazj occupati da basi, ed il numero dei gruppi risultanti sarà ancora

$$n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots\ldots\big(n-(n-2)\big) = 1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots(n-1)n.$$

6. In questo modo di formazione nessuna delle basi può accader ripetuta nello stesso gruppo. Nessuna delle basi è

esclusa dall' entrare in ciascun gruppo, giacchè tutti i posti sono occupati; finalmente una base qualunque viene nei diversi gruppi ad occupare tutti gli n posti: è avverata dunque la condizione del § 2.

7. Ritenuto il numero de' gruppi dato dall' espressione $1.2.3 \ldots . n$, quando vogliasi passare alla reale determinazione di essi, si procederà col seguente metodo semplice ed uniforme. Sia R_n il risultato che si cerca, sarà

$$R_n = \{(a)(b),\ (b)(a)\}c\}d\}e\}\ldots.\}z\},$$

ove s' intenda che il 2.° membro così disposto indichi una serie di operazioni uniformi da eseguirsi sempre sui termini a sinistra, cioè la notazione $\{(a)(b),\ (b)(a)\}c\}$ indica che si deve portare la base c successivamente negli spazj estremi ed intermedj dei gruppi già scritti, e racchiudere poscia la c fra le sue parentesi ( ), sarà così

$$\begin{aligned}\{(a)(b),\ (b)(a)\}c\} &= (a)(b)\,c\ ,\ (a)\,c\,(b)\ ,\ c\,(a)(b)\\ &\qquad (b)(a)\,c\ ,\ (b)\,c\,(a)\ ,\ c\,(b)(a)\\ &= (a)(b)(c)\ ,\ (a)(c)(b)\ ,\ (c)(a)(b)\\ &\qquad (b)(a)(c)\ ,\ (b)(c)(a)\ ,\ (c)(b)(a).\end{aligned}$$

Parimente

$$\{(a)(b),\ (b)(a)\}c\}d\} =$$

$$\{(a)(b)(c),\ (a)(c)(b),\ (c)(a)(b),\ (b)(a)(c),\ (b)(c)(a),\ (c)(b)(a)\}d\}$$

Si dovrà eseguire rispetto alla base $d\}$ la stessa operazione di trasporto successivo negli spazj estremi ed intermedj dei gruppi già esistenti. Ciò ottenuto e chiamato R_4 il risultato, si dovrà cercare l' espressione $\{R_4\}e\}$, la quale darà lo sviluppo della $\{(a)(b),\ (b)(a)\}c\}d\}e\}$, e così

si progredirà di seguito sino ad ottenere la R_n. Ciò ottenuto, si scriveranno in ciascun gruppo gl'indici nell'ordine progressivo $a, b, c \ldots z$ al di sopra di ciascuno spazio ( ). Dando ad n i diversi valori $1, 2, 3 \ldots n$ ed intendendo che R_1 indichi la base (a), si otterrà la serie ricorrente di primo grado

$$R_2 = (a)(b), \quad (b)(a) = R_1 \{ b \}$$

$$R_3 \ldots\ldots\ldots\ldots = R_2 \{ c \}$$

$$R_4 \ldots\ldots\ldots\ldots = R_3 \{ d \}$$

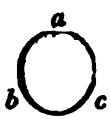
$$R_5 \ldots\ldots\ldots\ldots = R_4 \{ e \}$$

$$\vdots$$

$$R_n \ldots\ldots\ldots\ldots = R_{n-1} \{ z \}.$$

Potrà adunque il risultato finale R_n in cui n è il numero delle basi essere espresso più semplicemente da

$$R_n = (a) \{ b \} c \} d \} e \} \ldots, \} z \}.$$

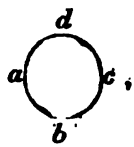
8. Un altro modo di formazione uniforme onde ottenere il risultato R_n è il seguente. Supponiamo da prima $n = 3$. Si dispongano le tre basi a, b, c sulla circonferenza di un cerchio col loro ordine  (a). Si scrivano i gruppi che nascono col leggere le tre basi incominciando da una qualunque di esse, indi incominciando dalla sua vicina e così di seguito sino a che si ritorni al 1.° gruppo. Se una tale lettura fu fatta sempre da destra a sinistra, si ripeta la stessa operazione da sinistra a destra scrivendo mano mano i gruppi

che ne nascono. Nella lettura da destra a sinistra il cerchio (a) darà i tre gruppi $(a)(b)(c)$, $(b)(c)(a)$, $(c)(a)(b)$, e nella lettura da sinistra a destra si avranno gli altri tre gruppi $(a)(c)(b)$, $(c)(b)(a)$, $(b)(a)(c)$, sarà perciò scrivendo poscia gl' indici progressivi

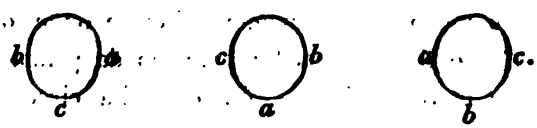
$$R_3 = (a)^a(b)^b(c)^c,\ (b)^a(c)^b(a)^c,\ (c)^a(a)^b(b)^c,\ (a)^a(c)^b(b)^c,\ (c)^a(b)^b(a)^c,\ (b)^a(a)^b(c)^c$$

Chiamo cerchj fondamentali quei cerchj nei quali eseguita la lettura in senso diretto ed inverso danno il risultato R_n che si cerca. La R_3 non ammetterà che il cerchio fondamentale (a).

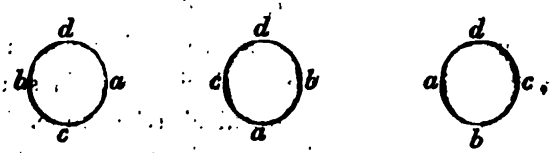
Se siano date 4 basi, cioè sia $n = 4$, converrà prima cercare i cerchj fondamentali da cui dipende la formazione della R_4. Si scrivano pure in cerchio le 4 date basi



si tenga fissa la base d e si stabiliscano tanti cerchj eseguendo la rotazione diretta sulle tre basi a, b, c, essendo queste date dai tre cerchj



Riposta la base d a suo luogo, si avranno i tre cerchj fondamentali



su ciascuno de' quali eseguita la lettura diretta si avrebbero 4 gruppi per ciascuno ossia un numero $= 3.4$ di gruppi,

ed eseguita su gli stessi la lettura inversa, si otterrebbero altri 3.4 gruppi, e perciò il numero totale de' gruppi che entrerà per formare la R_4 sarà $2.3.4$. Se sarà $n = 5$, il numero de' cerchj fondamentali desunto dalle sole rotazioni dirette sui cerchj fondamentali spettanti ad $n = 4$ sarà 3.4. Siccome ciascuno di essi dà 5 gruppi colla rotazione diretta ed altrettanti colla rotazione inversa, così il numero totale dei gruppi sarà $3.4 \times 5 \times 2 = 2.3.4.5$. Parimente siccome le rotazioni dirette pel numero di basi $= 5$ è $3.4.5$, così tale sarà il numero de' cerchj fondamentali spettanti al numero $n = 6$ di basi, ed il numero totale de' gruppi risulterà $2.3.4.5.6$. Così dicasi di seguito e si conchiuda che il numero de' cerchj fondamentali competenti ad n sarà $3.4.5 \ldots . (n-1)$, ed il numero de' gruppi risultanti da questi cerchj fondamentali sarà

$$3.4.5 \ldots . (n-1) \times n \times 2 = 2.3.4.5 \ldots . n.$$

9. Un gruppo formato delle basi $a, q, r, n \ldots . y, z$ e da una serie eguale d'indici e disposto nella forma

$$(a)^q (q)^r (r)^n \ldots . (y)^z (z)^a$$

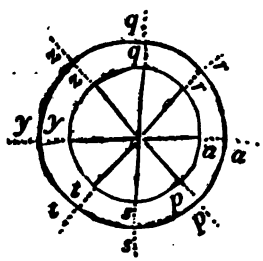
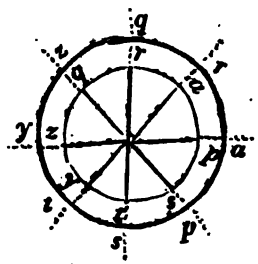
in cui ciascuna base eguaglia l'indice del precedente elemento, e l'ultimo indice è eguale alla prima base, chiamisi *gruppo rientrante*. Essendo date due serie (1), (2), una di basi, l'altra d'indici

$$q, \; r, \; a, \; p \ldots . z, \; y \qquad (1)$$

$$y, \; z \ldots p, \; a, \; r, \; q \qquad (2),$$

si potrà sempre comporre un gruppo rientrante purchè i termini della 1.ª serie siano a due a due eguali ai termini della seconda. Questa proprietà è inerente alla stabilita condizion d'eguaglianza fra le quantità d'una serie e quelle dell'altra,

anzi si può dire che questa altro non è che la condizione stessa espressa analiticamente. Se uno degl' indici non avesse una base a lui eguale, tal disposizione non sarebbe più possibile. S' immaginino due cerchj concentrici; si dividano in parti eguali al numero delle basi date, per es. = 8. Su ciascuna divisione del cerchio interno si scrivano in un ordine qualsivoglia

(a)   (b)

le date basi, e sul cerchio esterno si scrivano le stesse basi considerate come indici, in modo che le stesse lettere si corrispondano come nella fig. (a). Si dia al cerchio interno una rotazione di un arco $= \frac{1}{8}$ di circonferenza in uno o nell'altro verso, e si registri il gruppo risultante collo scrivere nello stesso verso in cui ebbe luogo la rotazione le basi e gl' indici che vi corrispondono ossia i diversi elementi. Da qualunque base s' incominci la lettura, si costituiranno tanti gruppi che tutti avranno la forma indicata in principio di questo paragrafo. La fig. (a), eseguita una rotazione da destra a sinistra del cerchio interno, diventa la (b). La lettura da destra a sinistra delle basi e rispettivi indici dà origine ai gruppi eguali

$$(q)^z\,(z)^y\,(y)^x\,(t)^s\,(s)^p\,(p)^a\,(a)^r\,(r)^q$$
$$(z)^y\,(y)^x\,(t)^s\,(s)^p\,(p)^a\,(a)^r\,(r)^q\,(q)^z$$
$$(y)^x\,(t)^s\,(s)^p\,(p)^a\,(a)^r\,(r)^q\,(q)^z\,(z)^y$$
$$\vdots$$
$$(a)^r\,(r)^q\,(q)^z\,(z)^y\,(y)^x\,(t)^s\,(s)^p\,(p)^a.$$

È perciò che una tale disposizione o forma di gruppi fu detta *rientrante*. Un gruppo proposto non cambia di valore col disporlo a seconda de' gruppi rientranti parziali in cui può decomporsi. Se la base è una sola $= k$, non si ha che il gruppo $(k)^k$, è questo pure, dietro la costruzione grafica adottata, un gruppo rientrante. Vi saranno perciò gruppi rientranti di 1.ª, 2.ª, 3.ª . . . . n^{esima} specie secondo il numero delle basi. Gli elementi fissi costituiranno altrettanti gruppi rientranti.

10. Un gruppo qualunque risultante dall' operazione indicata al § 7 si potrà scomporre in un certo numero di gruppi rientranti. Di fatti si consideri un gruppo qualunque risultante da 10 basi a, b, c, d, e, f, g, h, y, z, per esempio

$$(f)^a\,(d)^b\,(e)^c\,(a)^d\,(c)^e\,(h)^f\,(z)^g\,(g)^h\,(y)^y\,(b)^z.$$

Potremo per brevità di scrittura ommettere le parentesi. Si scelga nel proposto gruppo un elemento qualunque per es. h^f, vi si scriva a fianco l'elemento che avrà f per base, poscia si scriva quell' elemento che avrà per base l' indice dell' elemento precedente, e così di seguito. La base corrispondente all' ultimo indice già scritto o si troverà o non si troverà negli elementi restanti. Se si troverà, si dovrà continuare l'operazione, se non si troverà, converrà che questo ultimo indice corrisponda ad una delle basi già scritte, ma non potrà corrispondere ad alcuna di tali basi, tranne la prima, in quanto gl' indici già scritti corrispondono a tutte le basi, tranne la prima; dunque il gruppo si chiuderà e formerà un gruppo rientrante che separeremo dai residui elementi con una virgola. Nel caso proposto sarà

$$h^f\,f^a\,a^d\,d^b\,b^z\,z^g\,g^h\,,\quad e^c\,c^e\,y^y.$$

Gli elementi residui non avranno più nè basi, nè indici in cui si trovi alcuna delle lettere già scritte; conterranno adunque

le restanti basi del dato gruppo e loro corrispondenti indici eguali. Questa condizione avverata, si farà sul gruppo restante la stessa operazione per iscomporlo in un gruppo rientrante ed in elementi residui, e così di seguito sino a che gli elementi restanti costituiranno per loro stessi uno o più gruppi rientranti. Nel caso proposto gli elementi restanti sono e^c, c^e, y^y, ed essi costituiscono due gruppi rientranti, perciò il proposto gruppo sarà composto di tre gruppi rientranti, e sarà eguale al gruppo

$$h^f f^a a^d d^b b^z z^g g^h, e^c c^e, y^y.$$

Il carattere essenziale di tale decomposizione in gruppi rientranti si è che ad ogni formazione di tali gruppi la serie degli elementi residui è costituita come lo è il proposto gruppo da un certo numero di basi ed indici a due a due eguali fra loro, e perciò atti ad esser disposti sotto la forma di rientranti.

11. Quando in un gruppo rientrante qualunque si alternano tutte le basi coi loro rispettivi indici, il nuovo gruppo costituisce ancora un gruppo rientrante della stessa specie. Di fatti ritornando alla fig. (*a*) del § 9, si vede che era affatto indifferente che il cerchio interno portasse le basi e l'esterno gli indici, o che il cerchio interno portasse gl'indici e l'esterno le basi; ammesso questo cambiamento e fatta la lettura nella (*b*) nel senso contrario alla rotazione, ponendo per basi le quantità corrispondenti al cerchio esterno, si avrà ancora un gruppo rientrante, il quale, come è evidente corrisponderà al dato gruppo rientrante in cui si sono alternate le basi cogl'indici rispettivi. Così nel 1.° modo abbiamo trovato § 9

$$z^y y^t t^s s^p p^a a^r r^q q^z.$$

Se nel cerchio (*b*) si considerano ora le lettere esterne come basi, e le interne come indici, fatta la lettura incominciando

dalla base esterna z ed in senso inverso alla rotazione, cioè da sinistra a destra, si ottiene il gruppo rientrante

$$z^q\ q^r\ r^s\ a^p\ p^t\ s^t\ t^y\ y^z.$$

Se nel proposto si alternano le basi cogl'indici, si ha

$$y^x\ t^y\ s^t\ p^t\ a^p\ r^s\ q^r\ z^q,$$

il quale corrisponde al precedente quando si legga da destra a sinistra ciò che non altera il suo valore riducendosi ad un gruppo eguale. Chiamo *inversione* l'operazione di alternare fra loro la base col rispettivo indice; elementi *invertiti* due elementi della forma k^h, h^k, e gruppi *invertiti* due gruppi di cui l'uno consti degli elementi invertiti dell'altro. Se in un dato gruppo G s'indica con b la serie delle basi e con g la serie degl'indici, prese queste nell'ordine in cui si trovano nella G, un tal gruppo potrà scriversi colla notazione $(b)^g$. Il gruppo invertito di G sarà dato da $(g)^b$.

12. Quando in un proposto gruppo qualunque $(b)^g$ s'invertono tutti i suoi elementi, il gruppo invertito $(g)^b$ è composto dello stesso numero e specie di gruppi rientranti. Di fatti disposto il gruppo qualunque a seconda de' suoi gruppi rientranti, ciò che non ne altera la sua natura, ed invertite su questo le basi cogl'indici, siccome ciascun rientrante si mantiene rientrante della stessa specie, così anche due gruppi invertiti $(b)^g$, $(g)^b$ manterranno lo stesso numero e specie di rientranti.

13. Siccome i gruppi rientranti di 1.ª o di 2.ª specie sono eguali ai loro gruppi invertiti, così un gruppo qualsivoglia fatto di soli rientranti di 1.ª o di 2.ª specie o di una e dell'altra specie insieme sarà eguale al suo gruppo invertito.

14. Un gruppo rientrante G di una specie superiore alla 2.ª avrà un gruppo invertito disuguale, cioè non riducibile

ad esso. Di fatto si consideri un elemento qualunque h^k di esso gruppo, nessuno degli altri elementi sarà eguale all'invertito k^k, giacchè se ciò fosse, il gruppo dato G o sarebbe un gruppo di 2.ª specie ovvero non formerebbe un gruppo solo rientrante contro l'ipotesi, giacchè $k^k \ldots . h^k$ formano un gruppo rientrante di 2.ª specie. Sia G' il gruppo invertito di G, sarà esso un rientrante della stessa specie; la G' conterrà necessariamente l'elemento k^k, il quale non trovandosi in G, sarà impossibile collo scambiar l'ordine de' suoi elementi di convertire la G' in G, e perciò sarà G' diverso da G.

15. Un gruppo qualunque G, il quale consti di rientranti nè di sola 1.ª, nè di sola 2.ª specie, nè di sola 1.ª e 2.ª insieme, avrà un gruppo invertito G' diverso da G. Si sostituisca a G il suo equivalente H fatto di gruppi rientranti. Uno almeno di essi sarà di specie superiore alla 2.ª per ipotesi. Sia H' l'invertito di H, e perciò eguale all'invertito della G, H' avrà lo stesso numero e specie di rientranti di H, e perciò almeno un rientrante di specie superiore alla 2.ª equivalente a quello di H, ma invertito. Ma questi due saranno diversi fra loro, e perciò H' diverso da H e da G, ma H' è lo stesso G' ordinato pe' suoi rientranti, dunque sarà G' diverso da G.

16. Fra i gruppi di cui consta R_n ve ne sarà un certo numero fatto soltanto di rientranti di 2.ª specie se sarà n pari, non ve ne sarà alcuno se sarà n dispari. Vi sarà parimente in R_n un certo numero di gruppi composti solo di rientranti di 1.ª e 2.ª specie insieme, ma vi mancheranno i loro invertiti, giacchè ciascuno degli accennati gruppi riproduce sè stesso quando venga invertito.

17. Quando in un gruppo qualunque si scambiano di posto due basi h, k col porre k dove è la h e viceversa, tale operazione che scambia il primo gruppo nel 2.° dicesi

alternazione, ed i due gruppi diconsi *alternati*. Eseguire su un dato gruppo G una, due, tre .... x alternazioni è trovare quel gruppo G' che risulta, 1.° coll'alternar due basi fra loro, 2.° nel gruppo ottenuto alternar pure due basi purchè entrambe non siano le stesse di prima, ed ottenere un 3.° gruppo, e così su questo alternando due basi in modo da non ricadere su uno degli antecedenti, ottenere un 4.° gruppo e così di seguito sino ad eseguire x alternazioni onde ottenere un x^{esimo} gruppo. Si riterrà sempre nel seguito che il numero x rappresenti il minor numero possibile di alternazioni, ossia quel numero necessario e sufficiente per trasformare il dato gruppo G in G'.

18. Un'alternazione fra due basi qualunque cambia un gruppo rientrante in un gruppo composto di due rientranti. Sia di fatto proposto un gruppo rientrante qualunque

$$q^z\ z^y\ y^t\ t^s\ s^p\ p^a\ a^r\ r^q,$$

si ponga una virgola innanzi alle due basi qualsivogliano da alternarsi. Siano esse a, y, si scriverà

$$q^z\ z^y,\ y^t\ t^s\ s^p\ p^a,\ a^r\ r^q.$$

Se si fa l'alternazione di y con a, è per sè manifesto che il gruppo racchiuso fra le virgole diverrà un gruppo rientrante. Parimente gli elementi esterni alle due virgole congiunti insieme formeranno un altro gruppo rientrante, giacchè la 1.ª base dopo la virgola che è eguale all'ultimo indice dell'elemento precedente è portata al posto della prima base del gruppo estremo, e perciò insieme completano la condizione necessaria per divenir rientrante. Se in un'alternazione viene a formarsi un elemento fisso, è esso solo che forma il gruppo rientrante compreso dalle due virgole. S'incontra questo caso alternando due basi prossime y, z come nel

gruppo $q^z, z^y, y^x t^t s^p p^a a^r r^q$, ove alternando si ha

$$q^z, y^y, z^x t^t s^p p^a a^r r^q = y^y, q^z z^x t^t s^p p^a a^r r^q.$$

Se l'alternazione si fa fra una base intermedia qualunque ed una delle due estreme, per es. fra s e q, o fra s ed r, si scriverà

$$, q^z z^y y^x t^t, s^p p^a a^r r^q$$

$$q^z z^y y^x t^t, s^p p^a a^r, r^q.$$

I gruppi racchiusi fra le virgole costituiranno pure un gruppo rientrante dopo l'alternazione, e siccome nel 1.° caso anteriormente alla 1.ª virgola non vi sono elementi, così gli elementi residui costituiranno, come caso particolare in cui un gruppo è zero, per sè soli un rientrante.

19. Un'alternazione eseguita fra basi di due gruppi rientranti distinti fonde i due gruppi in un rientrante solo. Sia dato un gruppo decomponibile in due rientranti che indico con $(b)^\varepsilon (\beta)^\gamma$, ove b e β contengono due serie distinte di basi; sia q una delle basi della serie b, e p una della serie β, e siano p, q le basi da alternarsi. Posta una virgola innanzi a q nella b ed innanzi a p nella β, la b sarà divisa in due serie che diremo b', b'', e la β parimente in β', β''. Supposta analogamente separata in due serie ciascuna delle serie degl'indici g, γ ponendo $g = g', g''$, $\gamma = \gamma', \gamma''$, si avrà il gruppo

$$(b')^{\varepsilon'} (b'')^{\varepsilon''} (\beta')^{\gamma'} (\beta'')^{\gamma''}.$$

Sia a ciò che diventa b'' quando si sostituisce p alla sua prima base q, ed α ciò che diventa β'' quando alla sua prima base p si sostituisce la q. Eseguita l'alternazione, il detto gruppo diverrà

$$(b')^{\varepsilon'} (a)^{\varepsilon''} (\beta')^{\gamma'} (\alpha)^{\gamma''}.$$

Scritto questo gruppo in ordine inverso, cioè

$$(\alpha)^{\gamma''}\ (\beta')^{\gamma'}\ (a)^{\varepsilon''}\ (b')^{\varepsilon'}$$

costituirà un sol gruppo rientrante eguale a

$$(\alpha\,\beta'\,a\,b')^{\gamma'\gamma''\varepsilon''\varepsilon'}.$$

Sia per es. proposto il gruppo composto di due rientranti

$$(b)^{\varepsilon}\ (\beta)^{\gamma} = y^{\gamma}\ r^{q}\ q^{z}\ z^{y},\ a^{t}\ t^{s}\ s^{p}\ p^{a},$$

siano ancora p, q le basi da alternarsi, sarà

$$(b')^{\varepsilon'}\ (b'')^{\varepsilon''}\ (\beta')^{\gamma'}\ (\beta'')^{\gamma''} = y^{\gamma}\ r^{q},\ q^{z}\ z^{y},\ a^{t}\ t^{s}\ s^{p},\ p^{a},$$

dopo l'alternazione sarà

$$(b')^{\varepsilon'}\ (a)^{\varepsilon''}\ (\beta')^{\gamma'}\ (\alpha)^{\gamma''} = y^{\gamma}\ r^{q},\ p^{z}\ z^{y},\ a^{t}\ t^{s}\ s^{p},\ q^{a}.$$

Scritti i precedenti gruppi in senso inverso, sarà

$$(\alpha\,\beta'\,a\,b')^{\gamma''\gamma'\varepsilon''\varepsilon'} = q^{a}\ a^{t}\ t^{s}\ s^{p}\ p^{z}\ z^{y}\ y^{\gamma}\ r^{q},$$

che è un rientrante unico. La prova di questa riduzione riposa sugli stessi principj del § 14 ed esige la stessa avvertenza pel caso in cui una delle due basi da alternarsi appartiene al primo elemento del gruppo proposto.

20. Un gruppo rientrante di un numero n di elementi, ossia di n^{esima} specie, si trasforma con un numero $= n - 1$ di alternazioni in un gruppo di n rientranti di 1.ª specie, ossia in un gruppo fondamentale. Di fatto in forza della legge con cui si succedono alternativamente le basi e gl'indici ogni alternazione fra due basi prossime del rientrante proposto farà nascere un rientrante di 1.ª specie. Il gruppo proposto sarà in forza del § 18 cambiato con una 1.ª alternazione in due gruppi rientranti, uno di 1.ª e l'altro di $(n-1)^{esima}$

specie. Il gruppo rientrante di $(n-1)^{esima}$ specie sarà con una 2.ª alternazione cambiato parimente in due gruppi rientranti, uno di 1.ª e l'altro di $(n-2)^{esima}$ specie. Così progredendo si giungerà a render fissi, o di 1.ª specie, gli $n-2$ elementi del gruppo proposto con un numero $n-2$ di alternazioni. Resterà dunque un alternante di 2.ª specie della forma $h^k k^h$. Un'alternazione sola ridurrà questo a due elementi fissi. Ciò eseguito, si sarà ridotto il proposto rientrante in un gruppo di n rientranti di 1.ª specie ossia in n elementi fissi con un numero $n-1$ di alternazioni.

21. Il numero d'alternazioni atte a trasformare un gruppo qualsivoglia di n elementi in un gruppo di n rientranti di 1.ª specie, ossia in un gruppo fondamentale, sarà dato dalla differenza $n-m$, essendo m il numero de' gruppi rientranti di cui consta il gruppo proposto. S'immagini il gruppo proposto ordinato secondo i suoi m gruppi rientranti, e s'indichi colle m lettere α, β, γ, δ .... il numero degli elementi che entrano nel 1.°, 2.°, 3.° .... m^{esimo} gruppo rientrante di cui consta il proposto. Sarà

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta \ldots\ldots \mu = n.$$

Le alternazioni bastanti a convettire i gruppi rientranti in elementi fissi saranno pel 1.°, 2.°, 3.° .... m^{esimo} rientrante date rispettivamente da

$$\alpha-1,\ \beta-1,\ \gamma-1,\ \delta-1 \ldots\ldots \mu-1.$$

Se si chiama dunque X il numero di alternazioni necessarie a trasformare il gruppo proposto in un gruppo fondamentale, si avrà

$$X = (\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma-1)+(\delta-1)+\cdots\cdots+(\mu-1),$$

e siccome è m il numero delle lettere α, β .... μ, così sarà $X = \alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\mu-m$ ossia $X = n-m$.

22. Reciprocamente il numero d'alternazioni atte a trasformare un gruppo fondamentale ordinato A di n elementi in un gruppo G sarà dato ancora da $n-m$, essendo m il numero de' rientranti di G. In fatti il gruppo G' fatto di m rientranti ed equivalente a G verrà convertito in un gruppo fondamentale A' con un numero $n-m$ di alternazioni, ossia convertito nel gruppo fondamentale ordinato A equivalente ad A'. Dunque un numero $n-m$ di alternazioni eseguite in senso inverso sulla $A'=A$ ridurrà A', o il suo eguale A, alla $G=G'$.

23. Il numero x d'alternazioni atte a ridurre un gruppo qualunque $(b)^g$ ad un altro gruppo $(h)^g$ sarà dato da $x=n-\mu$, essendo n il numero degli elementi, e μ il numero de' rientranti che contiene il gruppo $(h)^b$. Di fatto non essendo gl' indici che una denominazione assegnata arbitrariamente agli spazj, ma conservata la stessa nei diversi gruppi, se ciascuna lettera della serie g degl' indici del gruppo dato $(b)^g$ si fa eguale alla rispettiva base, il gruppo $(b)^g$ sarà cambiato in un gruppo fondamentale $(b)^b$. Ma lo stesso cambiamento deve eseguirsi sul gruppo $(h)^g$, il quale diverrà $(h)^b$. Ora il numero delle permutazioni per passare dal gruppo fondamentale $(b)^b$ al gruppo $(h)^b$ è dato da $n-\mu$, essendo μ il numero de' rientranti di $(h)^b$, e perciò $n-\mu$ sarà parimente il numero delle permutazioni necessarie per passare dal proposto $(b)^g$ al gruppo $(h)^g$: giacchè eseguito il passaggio da uno all'altro degli antecedenti gruppi e riposta l'antica serie d'indici, si sarà convertita la $(b)^b$ in $(b)^g$, e la $(h)^b$ in $(h)^g$. Parimente se si cerca il numero delle alternazioni atte a passare dal gruppo $(b)^g$ ad un gruppo $(h)^k$, si dovrà ordinare il gruppo $(h)^k$ in modo che si abbia $(h)^k=(p)^g$, ed il numero delle alternazioni atte a passare da $(b)^g$ ad $(h)^k$ sarà dato pure da $n-\mu$, essendo ora μ il numero

de' rientranti che contiene il gruppo $(p)^k$. Sia per esempio

$$(b)^g = e^a\, b^b\, a^c\, c^d\, f^e\, d^f\, g^g$$

$$(h)^k = f^c\, c^e\, d^e\, a^d\, g^b\, b^g\, e^f,$$

la $(h)^k$ si trasformerà nel suo eguale $(p)^g$,

$$(h)^k = (p)^g = c^e\, g^b\, f^c\, a^d\, d^e\, e^f\, b^g, \qquad \text{sarà quindi}$$

$$(p)^b = c^e\, g^b\, f^c\, a^c\, d^f\, e^d\, b^g = c^e\, e^d\, d^f\, f^c\, a^c,\, g^b\, b^g,$$

siccome è $n = 7$ e $\mu = 2$, così il numero d'alternazioni atte a passare da $(b)^g$ a $(p)^g$ sarà $= 5$, e perciò ve ne vorranno pur 5 a passare da $(b)^g$ ad $(h)^k = (p)^g$. Di fatto eseguite le alternazioni sul gruppo $(b)^g$, si ha ommettendo gl'indici per semplicità

$$(b) = e\, b\, a\, c\, f\, d\, g$$

alternazioni

1.ª . . . . $c\, b\, a\, e\, f\, d\, g$

2.ª . . . . $c\, g\, a\, e\, f\, d\, b$

3.ª . . . . $c\, g\, f\, e\, a\, d\, b$

4.ª . . . . $c\, g\, f\, a\, e\, d\, b$

5.ª . . . . $c\, g\, f\, a\, d\, e\, b = (p)$.

Ne deriva pure che per passare da un gruppo $(b)^g$ ad un gruppo $(b_m)^g$ colla condizione che si debba nelle successive alternazioni passare per gruppi intermedj dati da

$$(b_1)^g\,,\quad (b_2)^g\,,\quad (b_3)^g \;.\;.\;.\;.\; (b_{m-1})^g$$

si richiederà un numero X d'alternazioni date da

$$X = mn - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \;.\;.\;.\;.\; + \mu_{m-1} + \mu_m),$$

essendo $\mu_1\;\; \mu_2\;\; \mu_3 \;.\;.\;.\;.\; \mu_m$ il numero de' rientranti

contenuti rispettivamente ne' gruppi

$$(b_1)^{b}, \quad (b_2)^{b_1}, \quad (b_3)^{b_2} \ldots\ldots (b_m)^{b_{m-1}}.$$

24. Nel processo indicato per determinare il minimo numero d'alternazioni atte a scambiare un gruppo qualunque G in un gruppo fondamentale A' si evitano tutte le alternazioni superflue che pure potrebbero eseguirsi sulla G, che congiunte colle alternazioni utili condurrebbero all'intento. Tali alternazioni superflue sono dovute alle alternazioni che si facessero fra due basi che comparirebbero in due gruppi rientranti della G. Giacchè posta la G sotto la forma di m gruppi rientranti che indicheremo con G', se si alternano due basi fra due diversi rientranti, questi si fondono in un sol gruppo rientrante, se un'altra base esistente in questo gruppo concentrato si alterna con una base esistente in un altro gruppo, essi si fondono in un solo, e perciò tre rientranti della G' sono divenuti uno solo. Se si progredisce in tal modo, si vede che con un numero $m-1$ di tali alternazioni si sarà ridotto il gruppo G' ad un rientrante solo che diremo H. Se si vuole ricondurre H al fondamentale A', si dovranno eseguire $n-1$ nuove alternazioni; dunque il numero totale di alternazioni comprese le $m-1$ già fatte sarà

$$n-1+(m-1)=n-m+2(m-1).$$

Ma dietro il § 21 bastano $n-m$ alternazioni per convertire G in A'; dunque le $2(m-1)$ alternazioni aggiunte non sono necessarie. Un tal numero è il doppio del numero delle alternazioni che accaderebbe di fare negli scambi di due basi che appartenessero a due diversi rientranti di cui consta la G, e che chiameremo per ciò *superflue*. Dunque le alternazioni *utili* e necessarie sono quelle che si operano fra basi appartenenti allo stesso rientrante, e le *superflue* quelle che si facessero fra basi appartenenti a rientranti diversi.

25. Se nei diversi gruppi componenti la R_n si suppone che un certo numero $= \lambda$ di basi divengano eguali fra loro, un numero $= \mu$ di altre basi eguali fra loro, un numero ν eguali fra loro e così di seguito, rimanendo gli indici disuguali, un gruppo qualunque della R_n si troverà ripetuto un numero di volte

$$= 1.2\ldots\lambda.1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu\ldots$$

ed il numero dei gruppi distinti della R_n sarà ridotto a

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots\lambda.1.2\ldots\mu.1.2\ldots\nu\ldots}$$

La serie delle basi $abcdef\ldots xyz$ che in tutti i modi possibili alternate compajono nei gruppi della R_n si concepisca, in ciascuno di essi, divisa in due serie p, B, essendo λ il numero delle basi di p ed $n-\lambda$ il numero delle restanti basi della B, per esempio

$$p = abcd, \quad B = ef\ldots xyz,$$

ovvero

$$p = cdef, \quad B = abg\ldots xyz$$

o in tutt' altro modo. Sia α la serie generica degl' indici che corrisponde alla serie p di basi e β quella che corrisponde alla serie B. I diversi gruppi della R_n, raccolti gli elementi aventi per basi la serie p, saranno ridotti della forma

$$(A) \quad (p)^{\alpha'}(B)^{\beta'}, \quad (p)^{\alpha''}(B)^{\beta''}, \quad (p)^{\alpha'''}(B)^{\beta'''}\ldots$$

ove le basi della p e quelle della B compariranno permutate in ciascuno de' gruppi (A) in tutti i modi possibili, ed ove in ciascuno il numero complessivo degl' indici α, β sarà eguale ad n. Siano p', p'', p''' ..... le $1.2.3\ldots\lambda$ permutazioni delle basi p, e B', B'', B''' .... le permutazioni delle basi B. Il 1.° dei gruppi (A) darà il sistema

di gruppi

$$(B)\quad \begin{array}{llll} (p')^{\alpha'}(B')^{\beta'}, & (p')^{\alpha'}(B'')^{\beta'}, & (p')^{\alpha'}(B''')^{\beta'} & \ldots \\ (p'')^{\alpha'}(B')^{\beta'}, & (p'')^{\alpha'}(B'')^{\beta'}, & (p'')^{\alpha'}(B''')^{\beta'} & \ldots \\ (p''')^{\alpha'}(B')^{\beta'}, & (p''')^{\alpha'}(B'')^{\beta'}, & (p''')^{\alpha'}(B''')^{\beta'} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

ciascun de' quali comparirà nella R_n. Un sistema (C) simile al sistema (B) verrà fornito dal 2.° dei gruppi (A) e così un terzo sistema (D) dal 3.° dei gruppi (A) e così di seguito, ed il complesso di tutti questi gruppi sarà equivalente alla R_n. Supponiamo ora che tutte le basi p divengano eguali fra loro, sarà

$$p'' = p''' = p^{iv} = \ldots\ldots = p',$$

ed il sistema (B) darà un numero

$1.2\ldots\ldots\lambda$ di gruppi identici con $\ldots\ (p')^{\alpha'}(B')^{\beta'}$,

uno stesso numero d'identici con $\ldots\ldots\ (p')^{\alpha'}(B'')^{\beta'}$,

un egual numero d'identici con $\ldots\ldots\ldots\ (p')^{\alpha'}(B''')^{\beta'}$

e così di seguito. Parimente il sistema (C) darà un numero

$1.2\ldots\ldots\lambda$ di gruppi identici con $\ldots\ldots\ (p')^{\alpha''}(B')^{\beta''}$,

un egual numero di gruppi identici con $\ldots\ldots\ (p')^{\alpha''}(B'')^{\beta''}$,

un egual numero di gruppi identici con $\ldots\ldots\ (p')^{\alpha''}(B''')^{\beta''}$

e così dicasi di seguito. Parimente il sistema (D) darà un numero $1.2\ldots\ldots\lambda$ di gruppi identici con

$$(p')^{\alpha'''}(B')^{\beta'''},\quad (p')^{\alpha'''}(B'')^{\beta'''},\quad (p')^{\alpha'''}(B''')^{\beta'''}\ \ldots\ldots$$

e così dicasi de' successivi gruppi della (A). Ne segue che ciascun gruppo della R_n comparirà ripetuto un numero $= 1.2\ldots\ldots\lambda$, ed i gruppi distinti della R_n in numero eguale a

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.2.3\ldots\ldots\lambda} = (\lambda+1)(\lambda+2)\ldots\ldots(n-1)n$$

saranno compresi nel sistema di gruppi

$$\begin{array}{llll} (p')^{\alpha'}\ (B')^{\beta'}\ , & (p')^{\alpha'}\ (B'')^{\beta'}\ , & (p')^{\alpha'}\ (B''')^{\beta'} & \ldots \\ (p')^{\alpha''}\ (B')^{\beta''}\ , & (p')^{\alpha''}\ (B'')^{\beta''}\ , & (p')^{\alpha''}\ (B''')^{\beta''} & \ldots \\ (p')^{\alpha'''}\ (B')^{\beta'''}\ , & (p')^{\alpha'''}\ (B'')^{\beta'''}\ , & (p')^{\alpha'''}\ (B''')^{\beta'''} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \qquad (H)$$

Si consideri ora un gruppo generico $(p)^{\alpha}\ (B)^{\beta}$ del sistema (H), e si concepisca divisa in due parti la serie B di basi che rappresenteremo con qC, e la serie β degl'indici pure in due analoghe parti γ, δ. Un gruppo qualunque del sistema (H) sarà della forma $(p')^{\alpha}\ (q)^{\gamma}\ (C)^{\delta}$ ove il numero degl'indici α, γ, δ sarà ancora $= n$. Il numero delle basi q sia eguale a μ, e si componga una serie di gruppi simili alla (A), avuto riguardo soltanto alla variabilità degl'indici α, γ, δ. Una tal serie sarà

$$(p')^{\alpha'}\ (q)^{\gamma'}\ (C)^{\delta'}\ ,\ (p')^{\alpha''}\ (q)^{\gamma''}\ (C)^{\delta''}\ ,\ (p')^{\alpha'''}\ (q)^{\gamma'''}\ (C)^{\delta'''}\ \ldots (K),$$

ed il sistema (H) sarà quello che risulta da ciascuno di questi gruppi in cui si alternino in tutti i modi possibili le basi contenute in q e quelle contenute in C. Dunque ciascuno di tali gruppi darà un sistema simile al sistema (B) quando in questo, ritenuto fisso il termine $(p')^{\alpha}$,

si cambino le p, B, α, β

rispettivamente in q, C, γ, δ.

Così il 1.° dei gruppi (K) darà un sistema (Q) simile a (B) in cui ciascun gruppo sarà affetto inoltre dal termine costante $(p')^{\alpha'}$. Supposto che le basi q divengano eguali fra loro, il sistema (Q) si ridurrà ai gruppi distinti

$$(p')^{\alpha'}\ (q')^{\gamma'}\ (C')^{\delta'}\ ,\ (p')^{\alpha'}\ (q')^{\gamma'}\ (C'')^{\delta'}\ ,\ (p')^{\alpha'}\ (q')^{\gamma'}\ (C''')^{\delta'}\ \ldots$$

ciascun de' quali comparirà ripetuto un numero di volte $= 1.2 \ldots . \mu$. Il 2.° dei gruppi (K) darà pure un sistema (Q') di gruppi distinti . . . . . .

$$(p')^{\alpha''}(q')^{\gamma''}(C')^{\delta''},\ (p')^{\alpha''}(q')^{\gamma''}(C'')^{\delta''},\ (p')^{\alpha''}(q')^{\gamma''}(C''')^{\delta''} \ldots .$$

ciascun de' quali sarà ripetuto un numero di volte $= 1.2 \ldots . \mu$, e così dicasi del 3.° gruppo componente la serie (K) che darà una serie (Q'') di gruppi ripetuti un numero $= 1.2 \ldots . \mu$, e così dicasi del 4.°, 5.°, 6.° .... gruppo della (K) che daranno i sistemi (Q'''), (Q^{IV}), (Q^{V}) . . . . , i cui gruppi saranno ripetuti un numero di volte $= 1.2 \ldots . \mu$. Ne deriva dunque che nell' ipotesi in cui le basi della p siano eguali fra loro e quelle della q pure eguali fra loro, un gruppo qualunque della R_n sarà ripetuto un numero di volte $= 1.2 \ldots . \lambda$ per la 1.ª ipotesi, e ciascun d'essi un numero di volte $= 1.2 \ldots . \mu$ per la 2.ª ipotesi. Dunque un gruppo qualunque sarà ripetuto un numero di volte

$$= 1.2 \ldots . \lambda . 1.2 \ldots . \mu.$$

Procedendo innanzi col supporre che un numero ν di basi r vengano separate dalla serie C di basi sopra contemplate, e seguendo lo stesso andamento, si conchiuderà che se, oltre le basi componenti le p, q, anche quelle componenti la r divengono eguali fra loro, un gruppo qualunque della R_n comparirà ripetuto un numero di volte

$$= (1.2 \ldots . \lambda)(1.2 \ldots . \mu)(1.2 \ldots . \nu),$$

e così si dirà per un altro numero t qualsivoglia di basi eguali fra loro. Ne risulterà che nella R_n un gruppo qualunque sarà ripetuto un numero

$$(1.2 \ldots . \lambda)(1.2 \ldots . \mu)(1,2 \ldots . \nu) \ldots .$$

ed il numero de' gruppi distinti si ridurrà a

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{(1 \cdot 2 \ldots\ldots \lambda)(1 \cdot 2 \ldots\ldots \mu)(1 \cdot 2 \ldots\ldots \nu)\ldots\ldots} = d.$$

Da ciò risulta implicitamente dimostrato che essendo

$$m,\ p,\ q,\ r,\ t \ldots\ldots$$

numeri interi qualunque, l'espressione

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots\ldots(p+m)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots q)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots r)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots t)\ldots\ldots}$$

si ridurrà sempre ad un numero intero quando sia adempita la condizione

$$q+r+t+\ldots\ldots \leqq m.$$

Risulta parimente che supposto p il numero delle più alte potenze di 2, non escluso l'esponente zero, che sono comprese in n; p' il numero di quelle comprese in λ; p'' di quelle comprese in μ; p''' di quelle comprese in ν e così di seguito, il numero $= d$ de' gruppi distinti compresi in R_n sarà dispari o pari secondo che sarà o non sarà zero l'espressione

$$n+p'+p''+p'''+\ldots\ldots-(p+\lambda+\mu+\nu+\ldots\ldots)$$

26. Se nei diversi gruppi componenti la R_n si suppone che un certo numero λ d'indici divengano fra loro eguali, un altro numero μ d'indici pure fra loro eguali, un numero ν fra loro eguali, e così di seguito rimanendo le basi tutte fra lor disuguali, un gruppo qualunque delle R_n sarà ripetuto un numero di volte

$$=(1 \cdot 2 \ldots\ldots \lambda)(1 \cdot 2 \ldots\ldots \mu)(1 \cdot 2 \ldots\ldots \nu)\ldots\ldots$$

ed il numero de' gruppi distinti si ridurrà a

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}{(1 \cdot 2 \ldots\ldots \lambda)(1 \cdot 2 \ldots\ldots \mu)(1 \cdot 2 \ldots\ldots \nu)\ldots\ldots}$$

Di fatti se si supponesse un numero $= \lambda$ di basi eguali fra loro, un numero $= \mu$ pure eguali fra loro e così di seguito, si è veduto che un gruppo qualunque è ripetuto un numero

$$(1 . 2 \ldots . \lambda)(1 . 2 \ldots . \mu) \ldots . = N.$$

Quei gruppi che compajono ripetuti in questa ipotesi si manterranno ripetuti anche dopo che si eseguisca l'inversione ne' gruppi stessi, perciò un gruppo qualunque invertito nella R_n comparirà ripetuto N volte. L'eseguire su ciascun gruppo tale inversione è lo stesso che supporre nella primitiva R_n un numero λ d'indici eguali fra loro, un numero μ d'indici eguali fra loro, e così di seguito lasciando disuguali le basi. Dunque anche nell'anzidetta ipotesi di eguaglianze fra gl' indici un gruppo qualunque sarà ripetuto N volte, e perciò il numero de' gruppi distinti si ridurrà a

$$\frac{1 . 2 \ldots . n}{(1 . 2 \ldots . \lambda)(1 . 2 \ldots . \mu) \ldots .}$$

27. Se si supponesse congiuntamente un numero λ di basi eguali fra loro, indi un numero λ' d'indici eguali fra loro, poscia due numeri μ, ν di basi fra loro eguali, indi due numeri μ', ν' d'indici eguali fra loro e così di seguito, ovvero si scegliesse un qualsivoglia ordine di successione fra l'eguaglianze fra le basi e quelle fra gl' indici, il risultato R_n sarebbe lo stesso di quello che si avrebbe incominciando dall'eguagliare i numeri λ, μ, $\nu \ldots .$ di basi fra loro, poscia eseguire l'eguaglianza fra i numeri λ', μ', $\nu' \ldots .$ d'indici, o viceversa incominciando dalle eguaglianze successive fra i sistemi λ', μ', $\nu' \ldots .$ d'indici, indi passando al sistema λ, μ, ν, $\varepsilon \ldots .$ di basi. Ne deriva che un gruppo qualunque della R_n sarà ripetuto per lo meno un numero di volte eguale a quello dei due prodotti

$$(\lambda \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \lambda \cdot \lambda)(1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \mu)(1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \nu) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$(1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \lambda')(1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \mu')(1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot \cdot \nu') \cdot \cdot \cdot \cdot$$

che presenta il valore più grande.

28. Se nelle lettere che costituiscono la serie delle basi e quella degl' indici si supponga un certo numero λ di esse eguali fra loro, un altro numero μ eguali fra loro e così di seguito, lasciando o no alcune delle lettere distinte fra loro, per es. ponendo soltanto $d = c = b = a$, $s = r = p = q$, tutti i gruppi in questa ipotesi, non avuto riguardo all' ordine con cui le lettere si succedono, avranno ancora una serie di basi eguali a due a due a quella degl' indici. Tali gruppi essendo perciò dotati del carattere essenziale alla disposizione in rientranti come nel § 9, potranno tutti essere disposti, anche in questo caso, sotto l'anzidetta forma. Si è veduto al § 23 che il minor numero d'alternazioni atte a passare da un gruppo $(b)^g$ ad un altro $(h)^g$ è quello in cui, trasformato in rientranti il nuovo gruppo $(h)^h$, si eseguiscano le alternazioni sempre fra basi prossime in ciascun rientrante. Siccome inoltre pel § 12 il numero de' rientranti di un dato gruppo rimane invariato nel suo gruppo invertito, così il numero atto a convertire il gruppo $(b)^g$ nel gruppo $(h)^g$ sarà anche dato da $n - \mu$, essendo ora μ il numero de' rientranti che presenta il gruppo invertito $(b)^h$. Quando pertanto abbia luogo l'ipotesi di un sistema di eguaglianze fra un certo numero di lettere nei due gruppi $(b)^g$, $(h)^g$ si passerà ancora dal 1.° al 2.° gruppo col minor numero d'alternazioni, quando disposto il gruppo $(b)^h$ sotto forma di rientranti, in nessun de' quali compaja ripetuta la stessa lettera, si eseguiscano in ciascuno le alternazioni fra le basi prossime. In tal modo dopo un numero $n - \mu$ d'alternazioni la serie b delle lettere diventa identica colla serie h. Solo che, mentre nel caso delle lettere non ripetute i rientranti di diversa

specie si presentano da loro stessi qualunque sia l'ordine con cui si proceda alla loro formazione, nell'assunta ipotesi in vece si dovranno con ordine cercare i rientranti di 1.ª, di 2.ª, di 3.ª.... specie, non passando ad una specie seguente prima di aver esaurito il numero della precedente, onde render massimo il numero de' rientranti distinti, e perciò minima la $x = n - \mu$. Ne deriva che, nell'assunta ipotesi di eguaglianze successive di lettere, ridotti i gruppi della R_n ai soli gruppi distinti si passerà da uno qualunque $(b)^g$ ad un altro $(h)^g$ con un numero $x = n - \mu$ di alternazioni fra le basi, essendo μ il numero de' rientranti di 1.ª, 2.ª, 3.ª.... specie, in nessuno de' quali compaja ripetuta la stessa lettera, ed in cui potrà trasformarsi il nuovo gruppo $(b)^h$. Se per cambiare con alternazioni successive la serie b nella h, con che il nuovo gruppo (essendo arbitraria la serie che rappresenta gl' indici) diventa un gruppo fondamentale $(h)^h$, si facesse un numero $= \alpha$ di alternazioni fra basi di rientranti diversi, il numero α rappresenterebbe come nel § 24. le alternazioni superflue. Il numero delle alternazioni sarebbe in tal caso $= n - \mu + 2\alpha$, e non si avrebbe perciò il minimo valore x che si cerca.

29. Per dare qualche esempio di quanto venne qui esposto si cerchi il più piccolo numero α d'alternazioni per passare dal nome *Evangelista Torricellius* al suo anagramma *en circescit Galileus alter*. La serie delle lettere componenti il nome proposto e quella del suo anagramma si considerino come due serie di basi. Pongasi la prima $= b$, la seconda $= h$. Le 23 lettere comuni di cui constano b, h disposte in ordine progressivo formeranno la serie arbitraria $= g$ d'indici e si avrà

$$aaceegiiilllnorrsttuv = g.$$

Si tratta dunque di trovare il numero x d'alternazioni per passare dal gruppo $(b)^g$ al gruppo $(h)^g$, ossia di cercare

il numero μ di rientranti di 1.ª, 2.ª .... specie che presenta il nuovo gruppo $(h)^b$ od il suo invertito $(b)^h$. Il gruppo

$$(h)^b = e^e v^n a^v n^i g^r e^e l^s i^c s^i t^t a^g t^o o^l r^i r^l i^e c^u e^s l^a l^l i^t u^o s^r$$

ridotto in rientranti si riduce a

$$e^e, e^e, l^l, l^t, e^i i^s s^e, l^r r^s s^l, a^t t^i i^r r^g g^a, i^n n^v v^a a^l l^o o^u u^c c^i$$

e l'invertito $(b)^h$ che mantiene lo stesso numero e specie di rientranti diventa

$$e^e, e^e, l^l, l^t, e^s s^i i^e, l^s s^r r^l, a^g g^r r^i i^e t^o, i^c c^u u^o o^l l^a a^v v^n n^i.$$

Essendo pertanto il numero di elementi $n = 23$ e $\mu = 8$, sarà $x = n - \mu = 15$.

Se si avesse voluto trasformare la serie b nella serie h, incominciando ad alternare quelle lettere della b che formano successivamente la 1.ª, 2.ª, 3.ª .... lettera della h, come alternando v con n, poscia a con v, indi a con n, in seguito g con r e così via via sino a formare l'intera h, si sarebbe nelle successive alternazioni in questo modo disposte incontrata l'alternazione di o con e. Ma siccome tali lettere non appartengono ad uno stesso rientrante, così una tale alternazione sarebbe stata superflua, ed è perciò che seguendo questa via il numero delle alternazioni non corrisponde più al valor minimo trovato $= 15$, ma al numero $17 =$ al numero $23 - 8 + 2$, eguale ad $n - \mu$ aumentato del doppio delle alternazioni superflue come al § 24 si è rimarcato.

Parimente il numero x d'alternazioni per passare da *Ave Maria gratia plena Dominus tecum* $= b$ al suo anagramma *Deipara inventa sum ergo immaculata* $= h$, si otterrà cercando il valore μ di tutti i rientranti di 1.ª, 2.ª, 3.ª .... specie

in cui può trasformarsi $(b)^h$ equivalente al gruppo

$$a^d v^e e^i m^p a^a r^r i^a a^i g^n r^r a^t t^n i^t a^a p^s t^m e^m n^e a^r d^g o^o m^i i^n n^m u^a s^t t^n e^l c^a u^t m^a$$

Siccome $(b)^h$ si trasforma in un gruppo composto di $\mu = 11$ rientranti, cioè

$$a^a, a^a, o^o, r^r, a^i i^n, i^m m^i, u^t t^\mu, a^t e^m m^a, e^i i^t t^n n^e, e^l t^\mu u^a a^r r^r v^e, a^d d^g g^n n^m m^p p^s c^a$$

così essendo $n = 31$, sarà $x = n - \mu = 20$.

30. Il risultato R_n composto di un numero sempre pari di gruppi può ordinarsi in due serie M, N di egual numero di termini che indicheremo con $R_n = (M, N)$ in modo che a ciascun termine della serie M corrisponda un analogo termine nella N che non ne differisca se non per l'alternazione fra due basi h, k arbitrariamente scelte. Di fatto se nella R_n si hanno di mira due basi h, k e si raccolgono tutti quegli elementi che sono congiunti collo stesso gruppo $h^p k^q$ in modo che detti H_1, H_2, H_3 .... tali elementi, il complesso di essi ossia il termine

$$(H_1, \ H_2, \ H_3 \ldots .)h^p k^q$$

sia indicato con $P_1 h^p k^q$, e siano parimente indicati con P_2, P_3, P_4 .... gli aggregati di elementi affetti rispettivamente dai gruppi $h^n k^y$, $h^m k^y$, $h^n k^x$ ...., la R_n avrà la forma:

$$R_n = \left(P_1 h^p k^q, \ P_2 h^n k^y, \ P_3 h^m k^y, \ P_4 h^n k^x \ldots .\right).$$

Se ora in questa serie si raccolgono tutti quei termini che non contengono gruppi alternati rispetto alle due basi h, k ed indichiamo con $\int\left(Q_n h^p k^q\right) = M$ il complesso di tali termini, il complesso de' restanti termini della R_n dovrà essere della forma $\int\left(Q_n k^p h^q\right) = N$: giacchè se si chiama $P_m h^x k^y$ un termine qualunque della serie M, il termine

$P_m k^x h^y$ alternato rispetto alle due basi h, k non potrà trovarsi per ipotesi nella serie M. Supponiamo che non si trovi, se è possibile, nella serie N; un tal complesso di gruppi non potrà trovarsi nella R_n, la quale mancherebbe in questa ipotesi di alcuni gruppi che pure possono formarsi coll'alternare in tutti i modi possibili le basi fra loro. Ciò essendo contrario al carattere essenziale della R_n, dovrà il termine in quistione trovarsi compreso nella serie N. Un discorso eguale servirà a provare viceversa che ad ogni termine della N corrisponderà un termine analogo ed alternato nella M. Siccome tale discorso può ripetersi per qualsivoglia termine della serie M, così la R_n potrà ordinarsi in due serie M, N tali che tutti i termini della 1.ª trovino i loro corrispondenti termini nella 2.ª e viceversa, non diversi fra loro a due a due se non per l'alternazione delle due basi h, k che furono scelte per ordinare la R_n. La R_n posta sotto la forma (M, N), ove le M, N hanno le significazioni date sopra, si dirà ordinata a seconda delle basi hk. La R_n potrà ordinarsi in tal modo per due basi qualunque della serie a, b, c . . . . y, z come si è fatto delle hk.

31. Se m è il numero de' rientranti in cui può scomporsi un gruppo qualunque della M, sarà $m \pm 1$ il numero de' rientranti competente al suo gruppo alternato nella N. Si vede dai §§ (14), (20) che si avrà $m+1$ se le due basi h, k appartengono allo stesso rientrante, ed $m-1$ se appartengono a due rientranti diversi.

32. Se il grado n della R_n è pari, la R_n sarà decomponibile in tre serie T, V, V' che esprimiamo con $R_n = (T, V, V')$ in cui T contenga tutti i gruppi ne' quali entrano uno o più elementi fissi, la V tutti quelli fra i restanti gruppi che avranno per lo meno un rientrante di specie superiore alla 2.ª, e V' tutti i gruppi composti di

soli rientranti di 2.ª specie. Se la n sarà dispari, la R_n conterrà le sole due serie T, V, ossia $R_n = (T, V)$. Di fatto se n è dispari, non potrà la R_n contenere gruppi di sola 2.ª specie § 16, perciò nella R_n ordinata come si è detto non entrerà la V'.

33. La serie V tanto per n pari che per n dispari sarà decomponibile in due serie $V = (I, I')$ tali che i gruppi contenuti in I' siano gl' invertiti due a due de' gruppi compresi in I. Si scelgano nella V tutti quei gruppi che non compajono invertiti fra loro, sia I una tal serie e chiamisi I' il complesso de' restanti gruppi. Si fissi un gruppo qualunque G appartenente ad I, e sia G' il suo invertito. Siccome G per ipotesi contiene almeno un rientrante di specie superiore alla 2.ª, così G' sarà diverso da G e non conterrà termini fissi, e riterrà ancora almeno un rientrante di specie superiore alla 2.ª, dunque G' non potrà essere compreso nei gruppi nè della T, nè della V' se n è pari. Se dunque G' non è contenuto nei gruppi rimasti alla V, non potrà nemmeno essere contenuto nella R_n. Ma se G' non è contenuto in R_n, questa non contiene, contro l'ipotesi, tutte le permutazioni possibili delle basi, mentre G' distinto da tutti gli altri gruppi rappresenta una delle permutazioni possibili, dovrà dunque G' essere compreso nei gruppi residuati alla V dopo la separazione da essa della serie I. Ripetuto lo stesso ragionamento rispetto a tutti i gruppi contenuti nella I, ne risulterà che la serie V sarà fatta di un numero pari di gruppi, e sarà decomponibile come si è detto nella $V = (I, I')$.

34. La R_n tanto per n pari che per n dispari può ordinarsi in due serie di gruppi $R_n = (S, W)$ ove la S contenga tutti i gruppi composti di soli rientranti di 1.ª o 2.ª specie (mancandovi quei di 2.ª se n è dispari) o di rientranti di 1.ª e 2.ª specie congiuntamente, e la W tutti i

restanti gruppi, ciascun de' quali conterrà almeno un rientrante di specie superiore alla 2.ª La W sarà inoltre decomponibile in due serie I_1, I_2, cioè $W = (I_1, I_2)$ tali che i gruppi della I_2 siano gl' invertiti dei gruppi della I_1 e viceversa. Di fatto si levi dalla W una serie di gruppi nella quale non si presenti alcuna coppia di gruppi invertiti fra loro. Sia I_1 una tal serie, ed I_2 la serie dei gruppi rimasti in W. Si contempli un gruppo qualunque G della I_1, sia G' il suo invertito. Siccome G contiene almeno un gruppo rientrante di specie superiore alla 2.ª, così anche G' conterrà almeno un gruppo di tale specie. La G' sarà un gruppo compreso nella I_2, giacchè se nol fosse, non essendo G' compreso nè in I_1 per ipotesi, nè in S, in quanto in S non si contengono rientranti di specie superiore alla 2.ª, non sarebbe neppur compreso nella R_n. Ma essendo G' diversa da G, mancherebbe nella R_n una delle sue possibili permutazioni fra basi e basi contro l' ipotesi. Siccome ciò si può applicare non solo a tutti i gruppi di I_1 rispetto a quelli di I_2, ma viceversa a tutti i gruppi di I_2 rispetto a quelli di I_1, così la R_n si potrà mettere sotto la forma $R_n = (S, I_1, I_2)$, avendo S, I_1, I_2 gli enunciati caratteri.

35. Ne deriva che R_n rimarrà invariabile col sostituire a tutti i suoi gruppi i loro invertiti; giacchè essendo S composta di gruppi di soli rientranti di 1.ª o 2.ª specie separatamente, e di soli rientranti di 1.ª e 2.ª specie insieme, essa rimane invariabile coll' invertire i suoi gruppi. Ma la W rimarrà pure invariabile coll' invertir tutti i suoi gruppi, giacchè essendo $W = (I_1, I_2)$, con tale inversione si cambiano I_1 in I_2 e viceversa.

36. Se nella R_n, posta sotto la forma $R_n = (M, N)$ come al § 30, si alternano fra loro le due basi h, k, la stessa R_n si cambia in (N, M), cioè tutti i gruppi

contenuti in M si cambiano nei gruppi contenuti in N e viceversa. Perciò la R_n rimane invariata coll' alternare le anzidette basi. Siccome le due basi scelte erano qualunque, così R_n rimarrà invariata coll' alternar fra loro due qualunque della n basi di cui essa consta.

37. La R_n rimane invariata dopo un numero p qualsivoglia d'alternazioni fra le sue basi, o dopo un numero qualsivoglia q d'alternazioni fra gl' indici. Essa rimane invariata dopo un numero p d'alternazioni fra le basi, ed un numero q d'alternazioni fra gl' indici, o dopo un numero q d'alternazioni fra gl' indici, ed un numero p d'alternazioni fra le basi. Di fatto la R_n rimane invariata coll' alternar due basi qualunque fra loro; se dunque in questa ottenuta si fa una 2.ª, 3.ª . . . . p^a alternazione di basi, rimarrà sempre invariata. Si alternino nella R_n due indici h, k fra loro, e sia X ciò ch'essa diventa. Chiamiamo R'_n l'invertita di R_n, sarà pel § 35 $R'_n = R_n$. Si alternino nella R'_n le due basi h, k fra loro, e sia R''_n il risultato di questa alternazione, sarà pel § 36 $R''_n = R'_n$, perciò $R''_n = R_n$; chiamisi R'''_n l'invertita di R''_n, sarà $R'''_n = R''_n$. Ma la R'''_n non è che il risultato dell'alternazione di due indici h, k eseguita sulla R_n, sarà dunque $R'''_n = X$, e perciò $R'''_n = R''_n = R'_n = R_n = X$. Perciò l'alternazione di due indici qualunque h, k lascia invariata la R_n, dunque dopo una seconda alternazione, una 3.ª, 4.ª . . . . q^a rimarrà ancora invariata la R_n. Ne deriva da ciò che anche dopo un numero p d'alternazioni fra le basi, e dopo un numero q d'alternazioni fra gl' indici rimarrà ancora invariata la R_n, e vi rimarrà parimente dopo un numero q d'alternazioni fra gl' indici ed un numero p fra le basi.

38. Le basi a, b, c . . . . y, z destinate indietro a rappresentare enti in genere si limitino ora a rappresentare quantità, e gl' indici che rappresentavano determinati luoghi

nello spazio rappresentino ora luoghi fissi entro formole o funzioni analitiche qualunque. I diversi gruppi derivati dal fondamentale ordinato rappresenteranno ora simbolicamente la stessa funzion fondamentale data, nella quale siansi fra loro permutate le quantità $a, b, c \ldots y, z$ che in essa si considerano. Siccome nei gruppi tanto gl'indici che le basi furono designati colle stesse lettere, così un'espressione qualunque $f(a, b, c \ldots y, z)$ s'intenderà tanto funzione delle $a, b, c \ldots y, z$ considerate come basi, quanto funzione delle stesse lettere considerate come indici di posti. Una data funzione $f(z, y, \alpha, \beta, m \ldots)$ in cui si sostituirà alla serie delle quantità non ordinate $z, y, \alpha \ldots$ la serie ordinata delle $a, b, c \ldots$ sarà rappresentata dal gruppo *simbolico* ordinato

$$(a)^a (b)^b (c)^c \ldots (n)^n = f(a, b, c \ldots n).$$

Quando si vorrà passare da un gruppo *simbolico* qualunque per es. $(n)^q (c)^b (b)^c \ldots (a)^n = (S)$ al suo corrispondente rappresentato per la funzione data che chiamerò *effettivo*, si considererà la f come funzione d'indici e si segneranno le $a, b, c \ldots n$ nella f con un apice. Lo stesso si farà rispetto agl'indici del gruppo simbolico (S) e si avrà

$$(E) \qquad f(a', b', c' \ldots n') \; ; \qquad (n)^{a'} (c)^{b'} (b)^{c'} \ldots (a)^{n'} \qquad (S).$$

Si passerà dal gruppo simbolico (S) al suo effettivo corrispondente col sostituire nella (E) considerata come funzione degl'indici $a', b', c' \ldots n'$ in luogo di essi quelle basi che loro competono negli elementi della (S). Sarà così $f(n, c, b \ldots a) =$ al gruppo stesso $(n)^a (c)^b (b)^c \ldots (a)^n$, ove a ciascun indice si è levato l'apice. Così in particolare sia data la funzione

$$\left\{ x^\lambda (\sin^y \alpha) (1 + \beta)^m \right\}^{\frac{\rho}{\gamma}} ; \quad \text{e siano } x, y, \alpha, \beta, \gamma$$

le quantità permutabili che si contemplano. Si porrà per semplicità

$$x = a, \quad \alpha = b, \quad y = c, \quad \beta = d, \quad m = e, \quad \gamma = f,$$

sarà con ciò

$$\left\{x^{\alpha}(\sin^{y}\alpha)(1+\beta)^{m}\right\}^{\frac{\rho}{\gamma}} = \left\{a^{b}(\sin^{c}b)(1+d)^{e}\right\}^{\frac{\rho}{f}} = (a)^{a}(b)^{b}(c)^{c}(d)^{d}(e)^{e}(f)^{f}.$$

Vogliasi ora trasformare il gruppo

$$(d)^{a}(a)^{b}(b)^{c}(f)^{d}(c)^{e}(e)^{f}$$

nel suo effettivo corrispondente. La funzione (E) ed il gruppo (S) diverranno rispettivamente

$$\left\{a'^{b'}(\sin^{c'}b')(1+d')^{e'}\right\}^{\frac{\rho}{f'}}, \quad (d)^{a'}(a)^{b'}(b)^{c'}(f)^{d'}(c)^{e'}(e)^{f'},$$

ed il gruppo effettivo che si cerca sarà dato da

$$\left\{d^{a}(\sin^{b}a)(1+f)^{c}\right\}^{\frac{\rho}{e}} = (d)^{a}(a)^{b}(b)^{c}(f)^{d}(c)^{e}(e)^{f}.$$

Con questo semplice modo di trasformazione si passerà dalla serie R_n di gruppi simbolici alla corrispondente serie di gruppi effettivi, trasformando ogni gruppo simbolico di R_n nel suo corrispondente gruppo effettivo.

Si osserverà che nulla osta che nella funzione data una o più basi siano ripetute in più luoghi, purchè in questi luoghi multipli s'intenda pure ripetuto l'indice stesso, e che inoltre nell'eseguire le alternazioni si ripeta la stessa base alternata in tutti que' luoghi multipli che furono contraddistinti collo stesso indice. D'ora innanzi un gruppo qualsivoglia di n basi si riguarderà sempre come la rappresentazione simbolica di una funzione delle stesse n basi $a, b, c \ldots y, z$.

Si potrà per comodo togliere nei gruppi le parentesi ( ), purchè si avverta come si è fatto al § 10 che i diversi elementi non sono in forma di prodotti e che gl' indici non indicano esponenti, per non confondere tali gruppi con quelli che deriverebbero da una funzione proposta fatta di prodotti. Così se la funzione proposta fosse $\phi(a)\chi(b)\psi(c)\ldots\theta(n)$ ove $\phi, \chi, \psi \ldots \theta$ sono simboli di funzioni da moltiplicarsi fra loro, il suo corrispondente gruppo sarebbe $a^a b^b c^c \ldots n^n$, considerati i suoi elementi come moltiplicati fra loro, e per distinguere che gl' indici non sono esponenti, si potranno racchiudere essi fra ( ) e scrivere $a^{(a)} b^{(b)} c^{(c)} \ldots n^{(n)}$: ciò si esprimerà col dire che le basi sotto forma di prodotto hanno la condizione di variar di valore al variar di posto.

39. Sino al § 38 si è contemplata una serie di gruppi isolati che abbiamo separati con virgole, perchè non soggetti fra loro ad alcuna relazione algebrica. Le basi indicando enti qualsivogliano e gl' indici designando luoghi arbitrarj nello spazio, i diversi gruppi non rappresentanti vere quantità, ma semplici relazioni non potevano essere assoggettati ad operazioni algebriche. Ma in forza delle limitazioni introdotte nel precedente paragrafo questi gruppi stessi possono assoggettarsi a relazioni qualunque fra loro.

40. Una funzione qualunque di n quantità, la quale rimanga invariabile coll' alternar due qualunque delle quantità date, dicesi *funzione simetrica*.

Siccome i diversi gruppi delle due serie M, N in cui si è decomposta la R_n al § 30 sono tali che coll' alternar di due basi qualunque h, k quelli di una serie si scambiano in quelli dell' altra e viceversa, così la somma di tutti i gruppi componenti la R_n, riguardati i gruppi come simboli di funzione, darà una funzione simetrica che indicheremo con $S\{(a)^a (b)^b (c)^c \ldots (y)^y (z)^z\}$ o più brevemente con $S(n)$. Per distinguere la $S(n)$ da altre egualmente dotate della

proprietà sopraccennata la chiameremo funzion simetrica *completa*. S' intenderà questa come derivata dalla più semplice delle funzioni simetriche, cioè dalla $A + B + C + D + \ldots$ costituente una somma di un numero $1 . 2 . 3 \ldots . n = n'$ di basi, quando alle basi A, B, $C \ldots$ siano sostituiti in quell'ordine che ci piace gli n' gruppi della R_n.

La simetrica completa $S(n)$ rimarrà invariata nelle stesse ipotesi in cui si è mostrato nei §§ 35, 36 e 37 rimanere invariata la R_n. In queste ipotesi in fatti la R_n rimarrebbe invariata quand'anche i suoi gruppi fossero affetti tutti dallo stesso segno $+$ considerato esso stesso come cosa, giacchè qualsivoglia alternazione eseguita su questi segni tutti identici non porterebbe variazione al complesso de'suoi gruppi, e siccome in tal caso la R_n si cambia nella $A + B + C + D \ldots = S(n)$, così questa godrà delle stesse proprietà della R_n. Parimente le proprietà indicate ai §§ 25, 26, 27 e 28 competeranno colle stesse condizioni alla funzion simetrica $S(n)$, la quale in questo caso, fatto l'aggregato dei gruppi identici, risulterà della forma HQ, ove Q rappresenterà la somma dei gruppi distinti, e la H il numero delle volte che un gruppo qualunque della $S(n)$ compare ripetuto in forza delle stesse ipotesi per le quali nei citati paragrafi compare ripetuto nella R_n.

La proposta funzione da assoggettarsi all'operazione indicata con S potrà essa stessa essere funzione simbolica delle basi conservando la stessa generalità del gruppo fondamentale della R_n, e potrà non ostante rappresentarsi col gruppo simbolico $(a)^a (b)^b (c)^c \ldots . (z)^z$.

Quando una funzione $f(a, b, c \ldots . y, z)$ comunque simbolica od effettiva consta dell'aggregato

$$f_1(a, b \ldots . y, z) \pm f_2(a, b \ldots . y, z) \pm f_3(a, b \ldots . y, z) \pm \text{ecc.}$$

ove una qualunque f_m contiene tutte le basi che voglionsi

soggette all' operazione S, si avrà

$$Sf(a, b \ldots y, z) = Sf_1(a, b \ldots y, z) \pm Sf_2(a, b \ldots y, z) \pm Sf_3(a, b \ldots y, z) \pm \text{ecc.}$$

Siccome ciascuna f_m è rappresentata dietro le stabilite convenzioni dallo stesso gruppo simbolico fondamentale $(a)^a (b)^b \ldots (y)^y (z)^z$, così quando si tratterà di passare dai gruppi nati da una qualsivoglia $S\{(a)^a (b)^b \ldots (y)^y (z)^z\}$ ai gruppi effettivi corrispondenti ad una f_m, si dovrà por mente che la stessa serie d'indici $a, b \ldots y, z$ ha una significazione diversa per ciascuna delle f_m.

41. Se nella simetrica completa $S\{(a)^a (b)^b \ldots (y)^y (z)^z\} = S(n)$ si suppone che il gruppo fondamentale ordinato affetto dalla S sia la rappresentazione simbolica della funzione $f(a, b, c \ldots y) z^x$ ove la z^x indica una potenza qualunque della base z che moltiplica la funzion qualunque f, la $S(n)$ non cesserà di essere funzione simetrica quando si supponga che l'esponente della base z si riduca a zero. La $S(n)$ rappresenterà in tal caso la somma di tutti i gruppi che nascono dalla $f(a, b \ldots x, y)$, permutando in tutti i modi possibili le n basi $a, b \ldots x, y, z$ negli $n-1$ luoghi occupati nella stessa f dalle $a, b \ldots x, y$. Parimente se il gruppo fondamentale rappresenta la funzione $f(a, b \ldots x) y^y z^z$, ove $y^y z^z$ sono il prodotto di potenze qualunque delle due basi y, z, la $S\{(a)^a (b)^b \ldots (x)^x y^y z^z\}$ a cui si riduce $S(n)$ non cesserà di essere funzione simetrica quando ne' risultanti gruppi si riducano a zero gli esponenti designati con y, z. Siccome in questa un gruppo qualunque verrà ripetuto dietro i §§ 26 e 40 un numero di volte $= 1.2$, così diviso il risultato per 1.2, si avrà la somma di tutti i gruppi distinti che nascerebbero dalla $f(a, b \ldots x)$ permutando in tutti i modi possibili le n basi $a, b \ldots x, y, z$ negli $n-2$ luoghi occupati nella f dalle sole $n-2$ basi $a, b \ldots x$. Così sarà pure una funzione simetrica la

$$S\left\{(a)^a(b)^b \ldots\ldots (v)^v x^x y^y z^z\right\}$$

quando nei gruppi che nascono si riducano a zero i tre esponenti x, y, z. Diviso il risultato per $1.2.3$, si avrà la somma de' gruppi distinti che nascono permutando in tutti i modi possibili negli $n-3$ luoghi della funzione f le n basi a, b, $c \ldots\ldots x$, y, z, e così dicasi successivamente. Quando la funzione stessa f si riduce al prodotto di potenze qualsivogliano delle basi, allora il gruppo fondamentale simbolico $(a)^a(b)^b \ldots\ldots (x)^x(y)^y(z)^z$ si riduce al gruppo effettivo $a^a b^b c^c \ldots\ldots x^x y^y z^z$, e la $S(n)$ alla

$$S_n\left\{a^a b^b c^c \ldots\ldots x^x y^y z^z\right\}$$

ove gl' indici sono cambiati tutti in esponenti. Se nei diversi gruppi di questa si suppone un numero $= \lambda$ di esponenti eguali a zero, per esempio $t = u = v = x = y = z = 0$ ove $\lambda = 6$, la funzion simetrica che ne nasce divisa per $1.2.3 \ldots\ldots \lambda$ rappresenterà la somma de' gruppi che nascono col permutare in tutti i modi possibili negli $n-\lambda$ luoghi occupati dalle basi a, b, $c \ldots\ldots r$, s nel prodotto $a^a b^b c^c \ldots\ldots r^r s^s$ tutte le n basi a, b, $c \ldots\ldots r$, s, t, u, v, x, y, z. La funzion simetrica intera che nasce quando si suppone che nel gruppo $a^a b^b c^c \ldots\ldots x^x y^y z^z$ i primi esponenti a, b, $c \ldots\ldots$ in numero $= \mu$ si conservino disuguali, e gli ultimi $n-\mu$ assumano un valor comune $= z$, verrà rappresentata colla notazione più compendiosa $S(a, b, c \ldots\ldots z^{n-\mu})$ ove le a, b, $c \ldots\ldots z$ quì racchiuse rappresentano esponenti, e la notazione $z^{n-\mu}$ indica che l'esponente z è ripetuto $n-\mu$ volte. Siccome in questa un gruppo qualunque compare ripetuto un numero di volte $= 1.2.3 \ldots\ldots (n-\mu)$, così la stessa espressione divisa per $1.2.3 \ldots\ldots (n-\mu)$ darà la somma de' gruppi distinti. Se nell'espressione suddetta si riduce a zero l'esponente z, essa diverrà $S(a, b, c \ldots\ldots 0^{n-\mu})$.

Parimente se in questa gli esponenti $a, b, c \ldots$ in numero $= \mu$ assumono tutti un valor comune $= a$, la precedente sarà espressa da $S(a^{\mu}, 0^{n-\mu})$. Se in questa si vogliono contemplare i soli gruppi distinti, si dividerà per $(1.2 \ldots \mu)(1.2 \ldots (n-\mu)$. Le ulteriori limitazioni che possono introdursi negli esponenti dei gruppi nati dallo sviluppo della $S(n)$ daranno luogo ad analoghe notazioni. In generale quando lo sviluppo dell'espressione $S\{(a)^{a}(b)^{b} \ldots (y)^{y}(z)^{z}\}$ si riduce in forza di limitazioni apportate alle generalità degl' indici ad una somma di gruppi in cui compajano indici od esponenti ripetuti, o che in ciascuno manchi una o più delle n basi che si contemplano, la funzione risultante si dirà simetrica *incompleta*.

42. Quando nella simetrica completa $S\{(a)^{a}(b)^{b} \ldots (y)^{y}(z)^{z}\}$ il gruppo simbolico sotto la S si cambia nel prodotto delle basi, e gl' indici si cambiano in esponenti, allora per non confondere questi colle basi si potrà alla serie degli esponenti espressa per le lettere romane sostituirvi una serie di analoghe lettere greche. Se pertanto nella funzion simetrica $S\{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots y^{\eta} z^{\zeta}\}$ si suppone che gli ultimi $n-\mu$ esponenti divengano eguali a zero, la somma dei gruppi distinti sarà affetta dal coefficiente $1.2.3 \ldots (n-\mu)$. Se l'espressione $S^{(\alpha, \beta, \gamma \ldots \rho)}$ usata da molti analisti viene impiegata per indicare la somma dei prodotti delle n basi combinate in tutti i modi possibili a μ, a μ ed elevate rispettivamente alle potenze $\alpha, \beta, \gamma \ldots \rho$ in numero $= \mu$, si avrà dietro la notazione adottata nel precedente paragrafo la relazione

$$S(\alpha, \beta, \gamma \ldots \rho, 0^{n-\mu}) = (1.2.3 \ldots (n-\mu)) S^{(\alpha, \beta, \gamma \ldots \rho)}.$$

Parimente chiamato $\pm A_m$ il coefficiente generico della x^{n-m} in un'equazione di grado n le cui radici siano indicate colle n basi $a, b, c \ldots y, z$, si avrà

$$S(1^m, 0^{n-m}) = \pm HA_m,$$

valendo il segno — o + secondo che m sarà pari o dispari. Dietro il paragrafo antecedente sappiamo che dev'essere

$$H = (1.2.3\ldots m)\left(1.2.3\ldots(n-m)\right).$$

Si può determinare in questo caso direttamente la H osservando che il numero dei gruppi della A_m è dato come è noto dall'espressione $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$, e che il numero totale dei gruppi della $S(1^m, 0^{n-m})$ compresi i gruppi identici è $= 1.2.3\ldots n$, ora la relazione $\frac{1}{H}S(1^m, 0^{n-m}) = \pm A_m$ deve sussistere non solo fra i gruppi del primo membro con quelli del secondo, ma ancora fra il numero dei gruppi del primo e quello dei gruppi del secondo membro, stante che la A_m consta di soli gruppi distinti; dunque sarà

$$\frac{1.2.3\ldots n}{H} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Onde cavato H ed osservando essere n eguale ovvero maggiore di m, si potrà ordinare il prodotto in senso contrario ed ottenersi

$$H = \left\{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\ldots 3.2.1\right\}\left\{1.2.3\ldots m\right\},$$

ossia come doveva essere

$$H = (1.2.3\ldots m)\left(1.2.3\ldots(n-m)\right).$$

Se si ha $m = n$, il fattore $1.2\ldots(n-m)$ scompare e quindi $H = 1.2.3\ldots n$. Così in particolare la notazione $\frac{1}{H}S(\alpha^6, \beta^4, \gamma^3, \delta^2, 0^{n-15})$, ove sarà

$$H = (1.2.3.4.5.6)\,1.2.3.4)\,(1.2.3)\,(1.2)\left(1.2.3\ldots(n-15)\right)$$

equivale alla notazione a lettere ripetute

$$S(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta, \beta, \beta, \gamma, \gamma, \gamma, \delta, \delta)$$

che viene generalmente usata, ma nella quale non è espresso, come nella precedente, il numero n delle basi che debbono entrare alla formazione de' gruppi.

43. Fra le funzioni simetriche incomplete di cui si è parlato nel precedente paragrafo esistono alcune relazioni che non sono che conseguenze immediate delle note formole di Waring e delle relazioni fra le radici di un'equazione ed i coefficienti di questa. S' indichi per abbreviazione con p_k il prodotto dei numeri interi $1.2.3 \ldots . k$, e con m un numero qualunque di esponenti rappresentati da

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots . \lambda, \mu,$$

si avrà

$$S(\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \lambda, \mu, 0^{n-m}) = \frac{1}{(n-m+1)p_{n-1}} S(\mu, 0^{n-1}) S(\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda, 0^{n-m+1})$$

$$- \frac{1}{n+m+1} S\left\{\frac{S_{m-1}\{(\alpha)^{\mu}(\beta)^{0}(\gamma)^{0} \ldots . (\lambda)^{0}\}}{p_{m-1}}\right\} \qquad (a)$$

ove il gruppo fondamentale $(\alpha)^{\mu}(\beta)^{0}(\gamma)^{0} \ldots . (\lambda)^{0}$ è destinato a rappresentare una funzione simbolica $f(\alpha, \beta, \gamma \ldots . \lambda)$ data dal gruppo o funzione $(\alpha + \mu, \beta, \gamma \ldots . \lambda, 0^{n-m+1})$ fatta in parte di simboli ed in parte di segni algebrici dietro quanto si è detto al § 40. In questa la μ e la 0^{n-m+1} sono costanti non essendo soggette alle alternazioni. I gruppi simbolici nati dallo sviluppo della $S_{m-1}\{(\alpha)^{\mu}(\beta)^{0}(\gamma)^{0} \ldots . (\lambda)^{0}\}$ si trasformeranno in effettivi con più speditezza applicando all'estremo di ciascun gruppo il simbolo 0^{n-m+1}, separando con virgole ciascun elemento, sopprimendo la serie degli indici zero, e sostituendo al primo elemento la somma della base e dell'indice costante μ.

Così supposto $m = 4$, la (a) diventa

$$S(\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0^{n-4}) = \frac{1}{(n-3)p_{n-1}} S(\delta, 0^{n-1}) S(\alpha, \beta, \gamma, 0^{n-3})$$

$$- \frac{1}{n-3} S\left\{\frac{S_3\{(\alpha)^\delta (\beta)^0 (\gamma)^0\}}{1.2}\right\}, \qquad (a')$$

e siccome sarà

$$\frac{1}{2} S_3\{(\alpha)^\delta (\beta)^0 (\gamma)^0\} = (\alpha)^\delta (\beta)^0 (\gamma)^0 + (\beta)^\delta (\alpha)^0 (\gamma)^0 + (\gamma)^\delta (\alpha)^0 (\beta)^0,$$

così passando dai simbolici agli effettivi, si avrà

$$\frac{1}{2} S_3\{(\alpha)^\delta (\beta)^0 (\gamma)^0\} = \left((\alpha^\delta, (\beta)^0, (\gamma)^0, 0^{n-3}\right) + \left((\beta)^\delta, (\alpha)^0, (\gamma)^0, 0^{n-3}\right) + \left((\gamma)^\delta, (\alpha)^0, (\beta)^0, 0^{n-3}\right)$$

$$= (\alpha + \delta, \beta, \gamma, 0^{n-3}) + (\beta + \delta, \alpha, \gamma, 0^{n-3}) + (\gamma + \delta, \alpha, \beta, 0^{n-3}),$$

onde sarà

$$\frac{1}{n-3} S\left\{\frac{S_3\{(\alpha)^\delta (\beta)^0 (\gamma)^0\}}{1.2}\right\} = \frac{1}{n-3}\left\{S(\alpha+\delta, \beta, \gamma, 0^{n-3}) + S(\beta+\delta, \alpha, \gamma, 0^{n-3}) + S(\gamma+\delta, \alpha, \beta, 0^{n-3})\right\}$$

Sostituito questo valore in (a') se ne otterrà il valor finale effettivo. Giova osservare che il simbolo p_0 nato dall'ipotesi $m = 2$ dev'essere omesso.

La formola (a) per tutti i diversi valori di m sussiste egualmente quando alcune delle lettere $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ diventano eguali fra loro.

Essendo α un esponente intero qualunque, si avrà parimente la relazione

$$S(\alpha, 0^{n-1}) = \sum_{h=1}^{h=q-1} (-1)^{h+1} \frac{p_n}{p_{n-h}} S(1^h, 0^{n-h}) S(\alpha - h, 0^{n-1}) + Q \qquad (b)$$

ove per $\alpha > n$, ossia per $\alpha = n + m$,

sarà $q = n - m$ e $Q = 0$; per $\alpha = n$

sarà $q = n$ e $Q = 0$; e per $\alpha > n$

sarà $q = \alpha$ e $Q = (-1)^{\alpha+1} \frac{p_{\alpha-1} p_{n-1}}{p_{n-\alpha}} S(1^\alpha, 0^{n-\alpha})$.

Nelle stesse ipotesi sarà pure

$$S(1^\alpha, 0^{n-\alpha}) = \frac{p_{\alpha-1} p_{n-\alpha}}{p_{n-1}} \sum_{h=1}^{h=\alpha} (-1)^{h+1} \frac{S(h, 0^{n-1}) S(1^{\alpha-h}, 0^{n-\alpha+h})}{p_{\alpha-h} p_{n-\alpha+h}} \quad (c)$$

Il valore $h = \alpha$ darebbe per ultimo termine della (c) l'espressione

$$(-1)^{\alpha+1} \frac{p_{\alpha-1} p_{n-\alpha} S(\alpha, 0^{n-1}) S(1^0, 0^n)}{p_0 p_{n-1} p_n}$$

Ma osservando che

$$\frac{S(1^0, 0^n)}{p_0 p_n} = \frac{S(0^n)}{p_n} = 1,$$

la precedente si ridurrà a

$$(-1)^{\alpha+1} p_{\alpha-1} p_{n-\alpha} S(\alpha, 0^{n-1}),$$

come dev'essere.

Dietro le convenzioni adottate indietro l'espressione simbolica

$$\frac{S(1^\alpha, 0^{n-\alpha})}{p_\alpha p_{n-\alpha}}$$

rappresenta il coefficiente $\pm A_\alpha$ della potenza $x^{n-\alpha}$ in un'equazione di grado n, le cui radici siano rappresentate dalle n basi $a, b, c \ldots y, z$.

44. Chiameremo simetriche *complesse* quelle funzioni simetriche che derivano da opportune combinazioni, sia delle simetriche *semplici* complete od incomplete, sia dei gruppi di cui esse constano. Così una funzione qualsivoglia F di una simetrica

semplice dà origine ad una funzion simetrica complessa. Parimente se in una funzion simetrica di p_n basi $A, B, C, D \ldots$ si sostituiscano a queste i p_n gruppi di una funzion simetrica semplice, il risultato sarà una funzione simetrica complessa delle n basi $a, b, c \ldots y, z$. Si vede da qui come sottoponendo i gruppi ad una legge di relazione simetrica o sottoponendo la simetrica semplice ad una funzion qualunque, si dia origine ad un indefinito numero di simetriche complesse che rimarranno invariabili, comunque siasi la forma sotto cui si è impiegata la simetrica semplice. Inoltre una funzione della stessa simetrica complessa od una funzione di simetriche diverse aventi lo stesso sistema di basi, darà origine a nuove simetriche complesse.

45. Così in particolare sia data l'espressione $\cos(p-q)r^0$. Il suo gruppo fondamentale simbolico, osservando che $\cos(p-q)$ è invariabile coll'alternazione delle due basi p, q, sarà dato da $(a)^a (b)^a (c)^c$. La funzion simetrica incompleta $\frac{1}{p_2} S\{(a)^a (b)^a (c)^c\}$ quando si riduca a zero l'esponente c e si traducano in effettivi i gruppi simbolici, darà

$$\cos(p-q) + \cos(r-q) + \cos(r-p).$$

Il prodotto ABC è una funzion simetrica delle basi A, B, C, dunque il prodotto dei gruppi della $\frac{1}{p_2} S\{(a)^a (b)^a (c)^0\}$ darà la funzion simetrica complessa $\cos(p-q)\cos(r-q)\cos(r-p)$. Questa funzion complessa può anche essere generata dalla somma di tre simetriche incomplete

$$\frac{1}{6} S\{a^2 b^2 c^2\} + \frac{1}{6} S\{d^2 e^2 f^2\} + \frac{1}{2} S\{g^1 h^1 l^0\}$$

quando pongasi negli sviluppi ottenuti

$$\begin{array}{lll} a = \sin p & b = \sin q & c = \sin r \\ d = \cos p & e = \cos q & f = \cos r \\ g = ad & h = be & l = cf. \end{array}$$

La funzion simetrica $(a+b)(a+c)(b+c)$ sarà originata tanto dal prodotto dei tre gruppi nati dallo sviluppo della

$$\frac{1}{2}S\left\{(a+b)c^0\right\} = \frac{1}{2}S\left\{(a)^a(b)^a c^0\right\}$$

quanto dall'aggregato delle simetriche semplici

$$S(0,1,2)+\frac{1}{3}S(1^3) = S\left\{a^2b^1c^0\right\}+\frac{1}{3}S\left\{a^1b^1c^1\right\}.$$

Così la funzione simetrica

$$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)$$

risulta tanto dal prodotto de' sei gruppi nati dallo sviluppo di

$$\frac{1}{4}S\left\{(a+b)c^0d^0\right\} = \frac{1}{4}S\left\{(a)^a(b)^a c^0 d^0\right\}$$

quanto dall'aggregato

$$S(0,1,2,3)+\frac{1}{3}S(2^3,0)+\frac{1}{3}S(3,1^3)+S(2^2,1^2)$$

$$= S\left\{a^0b^1c^2d^3\right\}+\frac{1}{3}S\left\{a^2b^2c^2d^0\right\}+\frac{1}{3}S\left\{a^3b^1c^1d^1\right\}+S\left\{a^2b^2c^1d^1\right\}$$

Se nel prodotto $ABCD\ldots.$ di un numero p_n di basi si sostituiscono alle $A, B, C\ldots..$ i p_n gruppi nati dalla simetrica semplice $S\left\{a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots.y^\eta z^\zeta\right\}$ qualunque siano gli esponenti $\alpha, \beta, \gamma\ldots.\zeta$, non escluso lo zero, si avrà per risultato l'espressione $(abc\ldots.yz)^{qp_{n-1}}$, ove sarà $q = \alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\zeta$. Di fatti un elemento qualunque m^μ comparirà in tanti gruppi quante permutazioni ammettono le restanti $n-1$ basi ossia un numero $= p_{n-1}$; lo stesso vale per gli altri elementi $m^\alpha, m^\beta\ldots.m^\zeta$, onde nel prodotto di tutti gli anzidetti gruppi la base m avrà per esponente il prodotto $(\alpha+\beta+\gamma\ldots.\zeta)p_{n-1}$. Siccome

lo stesso vale per tutte le altre $n-1$ basi componenti gli anzidetti gruppi, così il prodotto in questione avrà la forma $(abc\ldots yz)^{q_{n-1}}$.

Parimente la funzion simetrica complessa $(a-b)^2(c-a)^2(c-b)^2$ potrà riguardarsi generata tanto dal prodotto dei gruppi

$$\frac{1}{2}S\left\{(a-b)^2c^0\right\} = \frac{1}{2}S\left\{(a)^a(b)^a c^0\right\}$$

quanto dall'aggregato delle simetriche incomplete relative al sistema a, b, c di basi

$$S(4,2,0)+2S(3,2,1)-S(4,1^2)-S(3^2,0)-S(2^3)$$

che equivale a

$$S\left\{a^4b^2c^0\right\}+2S\left\{a^3b^2c^1\right\}-S\left\{a^4b^1c^1\right\}-S\left\{a^3b^3c^0\right\}-S\left\{a^2b^2c^2\right\},$$

così la simetrica complessa

$$(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(d-c)^2$$

potrà essere generata tanto dal prodotto dei 6 gruppi che nascono dalla

$$\frac{1}{(p_2)^6}S\left\{(a-b)^2c^0d^0\right\} = \frac{1}{(p_2)^2}S\left\{(a)^a(b)^a c^0d^0\right\}$$

quanto dall'aggregato delle simetriche semplici

$$\begin{aligned}
&S(6,4,2,0)+2S(5,4,3,0)+2S(6,3,2,1)-2S(5,4,2,1)\\
&+2S(5,3,2^2)+2S(4^2,3,1)-S(6,4,1^2)-S(6,3^2,0)\\
&-S(5^2,2,0)-2S(5,3^2,1)-3S(4,3^2,2)+S(5^2,1^2)\\
&+S(4^2,2^2)-S(6,2^3)-S(4^3,0)+S(3^4)
\end{aligned}$$

In generale la simetrica complessa

$$(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2(e-a)^2(e-b)^2\ldots(z-a)^2(z-b)^2\ldots(z-y)^2$$

composta di un numero $= n$ di basi potrà concepirsi generata tanto dal prodotto di un numero $= \frac{p_n}{p_2 p_{n-2}}$ di gruppi nati dallo sviluppo della

$$\frac{1}{p_2 p_{n-2}} S\left\{(a-b)^2 c^0 d^0 e^0 \ldots y^0 z^0\right\} = \frac{1}{p_2 p_{n-2}} S\left\{(a)^a (b)^a c^0 d^0 \ldots y^0 z^0\right\}$$

quanto dall'aggregato dei gruppi che nascono dalla

$$S\left(R_n\left\{(\alpha)^\alpha (\beta)^\beta (\gamma)^\gamma \ldots (\zeta)^\zeta\right\}\right), \quad \text{quando}$$

1.° Si sviluppi la simbolica R_n fatta delle n basi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta$ ne' suoi p_n gruppi.

2.° Si sostituiscano alle virgole della R_n i segni $+$ ovvero $-$ innanzi a ciascun gruppo, secondo che la differenza $n - m$ sarà pari o dispari, essendo m il numero dei rientranti del gruppo stesso.

3.° Si passi dai gruppi simbolici agli effettivi ammettendo che il gruppo fondamentale $(\alpha)^\alpha (\beta)^\beta (\gamma)^\gamma \ldots (\zeta)^\zeta$ corrisponde all'effettivo $(\alpha + \alpha, \beta + \beta, \gamma + \gamma \ldots \zeta + \zeta)$ che nasce dal separare con virgole gli elementi e sostituire a questi la somma delle basi ed indice rispettivo.

4.° In ciascun gruppo effettivo affetto dal segno S si ponga

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 3 \ldots \zeta = n - 1.$$

Per dare un esempio di queste regole si supponga $n = 4$, sarà $p_4 = 24$, e si avrà da sviluppare il 2.° membro della

$$\left\{(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)\right\}^2 = S\left(R_4\left\{(\alpha)^\alpha (\beta)^\beta (\gamma)^\gamma (\delta)^\delta\right\}\right).$$

Posto il 1.° membro $= P$, e ritenuto che le $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ debbono in fine essere rimpiazzate rispettivamente dai valori $0, 1, 2, 3$, si avrà per la 1.ª e 2.ª delle precedenti regole

$$P = S\Big(+(\alpha)^\alpha(\beta)^\beta(\gamma)^\gamma(\delta)^\delta - (\alpha)^\alpha(\beta)^\beta(\delta)^\gamma(\gamma)^\delta + (\alpha)^\alpha(\delta)^\beta(\beta)^\gamma(\gamma)^\delta - (\delta)^\alpha(\alpha)^\beta(\beta)^\gamma(\gamma)^\delta$$
$$-(\alpha)^\alpha(\gamma)^\beta(\beta)^\gamma(\delta)^\delta + (\alpha)^\alpha(\gamma)^\beta(\delta)^\gamma(\beta)^\delta - (\alpha)^\alpha(\delta)^\beta(\gamma)^\gamma(\beta)^\delta + (\delta)^\alpha(\alpha)^\beta(\gamma)^\gamma(\beta)^\delta$$
$$+(\gamma)^\alpha(\alpha)^\beta(\beta)^\gamma(\delta)^\delta - (\gamma)^\alpha(\alpha)^\beta(\delta)^\gamma(\beta)^\delta + (\gamma)^\alpha(\delta)^\beta(\alpha)^\gamma(\beta)^\delta - (\delta)^\alpha(\gamma)^\beta(\alpha)^\gamma(\beta)^\delta$$
$$-(\beta)^\alpha(\alpha)^\beta(\gamma)^\gamma(\delta)^\delta + (\beta)^\alpha(\alpha)^\beta(\delta)^\gamma(\gamma)^\delta - (\beta)^\alpha(\delta)^\beta(\alpha)^\gamma(\gamma)^\delta + (\delta)^\alpha(\beta)^\beta(\alpha)^\gamma(\gamma)^\delta$$
$$+(\beta)^\alpha(\gamma)^\beta(\alpha)^\gamma(\delta)^\delta - (\beta)^\alpha(\gamma)^\beta(\delta)^\gamma(\alpha)^\delta + (\beta)^\alpha(\delta)^\beta(\gamma)^\gamma(\alpha)^\delta - (\delta)^\alpha(\beta)^\beta(\gamma)^\gamma(\alpha)^\delta$$
$$-(\gamma)^\alpha(\beta)^\beta(\alpha)^\gamma(\delta)^\delta + (\gamma)^\alpha(\beta)^\beta(\delta)^\gamma(\alpha)^\delta - (\gamma)^\alpha(\delta)^\beta(\beta)^\gamma(\alpha)^\delta + (\delta)^\alpha(\gamma)^\beta(\beta)^\gamma(\alpha)^\delta\Big)$$

Per la 3.ª $\qquad P =$

$$S\Big(+(2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta) - (2\alpha, 2\beta, \delta+\gamma, \gamma+\delta) + (2\alpha, \delta+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\delta) - (\delta+\alpha, \alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\delta)$$
$$-(2\alpha, \gamma+\beta, \beta+\gamma, 2\delta) + (2\alpha, \gamma+\beta, \delta+\gamma, \beta+\delta) - (2\alpha, \delta+\beta, 2\gamma, \beta+\delta) + (\delta+\alpha, \alpha+\beta, 2\gamma, \beta+\delta)$$
$$+(\gamma+\alpha, \alpha+\beta, \beta+\gamma, 2\delta) - (\gamma+\alpha, \alpha+\beta, \delta+\gamma, \beta+\delta) + (\gamma+\alpha, \delta+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\delta) - (\delta+\alpha, \gamma+\beta, \alpha+\gamma, \beta+\delta)$$
$$-(\beta+\alpha, \alpha+\beta, 2\gamma, 2\delta) + (\beta+\alpha, \alpha+\beta, \delta+\gamma, \gamma+\delta) - (\beta+\alpha, \delta+\beta, \alpha+\gamma, \gamma+\delta) + (\delta+\alpha, 2\beta, \alpha+\gamma, \gamma+\delta)$$
$$+(\beta+\alpha, \gamma+\beta, \alpha+\gamma, 2\delta) - (\beta+\alpha, \gamma+\beta, \delta+\gamma, \alpha+\delta) + (\beta+\alpha, \delta+\beta, 2\gamma, \alpha+\delta) - (\delta+\alpha, 2\beta, 2\gamma, \alpha+\delta)$$
$$-(\gamma+\alpha, 2\beta, \alpha+\gamma, 2\delta) + (\gamma+\alpha, 2\beta, \delta+\gamma, \alpha+\delta) - (\gamma+\alpha, \delta+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\delta) + (\delta+\alpha, \gamma+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\delta)\Big)$$

Finalmente per la 4.ª si ottiene

$$P = S(0, 2, 4, 6) - S(0, 2, 5, 5) + S(0, 4, 3, 5) - S(3, 1, 3, 5)$$
$$- S(0, 3, 3, 6) + S(0, 3, 5, 4) - S(0, 4, 4, 4) + S(3, 1, 4, 4)$$
$$+ S(2, 1, 3, 6) - S(2, 1, 5, 4) + S(2, 4, 2, 4) - S(3, 3, 2, 4)$$
$$- S(1, 1, 4, 6) + S(1, 1, 5, 5) - S(1, 4, 2, 5) + S(3, 2, 2, 5)$$
$$+ S(1, 3, 2, 6) - S(1, 3, 5, 3) + S(1, 4, 4, 3) - S(3, 2, 4, 3)$$
$$- S(2, 2, 2, 6) + S(2, 2, 5, 3) - S(2, 4, 3, 3) + S(3, 3, 3, 3).$$

Raccolti in questa i termini identici ed ordinati sotto le S i numeri in ordine decrescente e posto l'indice numerico sui numeri ripetuti, si vedrà che un tal risultato coincide coll'aggregato superiormente ottenuto nella stessa ipotesi di $n = 4$ e che fu verificato con calcolo diretto.

46. Dicesi *funzione alternata* di più quantità o basi $a, b, c, d \ldots$ una funzione delle stesse basi che cambia di segno mantenendosi di egual valore coll'alternar due qualunque delle basi che si considerano. Riterremo la stessa definizione anche pel caso in cui la funzione sia simbolica, uniformandoci in ciò a quanto si è stabilito al § 40 rispetto alle simetriche. Una funzione $F(a)$ che goda della proprietà espressa da $F(a) = F(-a)$ dicesi funzione *pari* di a, se in vece è dotata della proprietà espressa da $F(a) = -F(-a)$ dicesi funzione *dispari*. Parimente una funzione $F(a, b, c \ldots y, z)$ dicesi funzion pari o dispari secondo che è verificata una delle due condizioni

$$F(a, b, c \ldots y, z) = \pm F(-a, -b, -c \ldots -y, -z).$$

La $S F(a, b, c \ldots y, z)$ sarà funzione simetrica pari o dispari secondo che la stessa F sarà funzione pari o dispari. Se A è una funzione alternata, sarà $F(A)$ una funzion simetrica od alternata secondo che $F(x)$ sarà una funzione pari o dispari di x. Si vede in fatto dagli esempi dati nel precedente paragrafo che il quadrato delle funzioni alternate

$$(b-a)(c-a)(c-b) \; ; \quad (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c) \ldots$$

è una funzione pari e perciò una funzione simetrica esprimibile per le differenti S ivi indicate. Lo stesso vale di una potenza pari qualunque di queste alternate, laddove le potenze dispari delle stesse riducendosi ad un aggregato di funzioni simetriche moltiplicato per la stessa alternata proposta, rimarrebbero funzioni alternate. Siano $A', A'', A''' \ldots A^{k}$

diverse funzioni alternate rispetto allo stesso sistema di basi

$$a, b, c \ldots y, z, \text{ sarà } F(A', A'', A''' \ldots A^h)$$

una funzione simetrica od alternata rispetto alle stesse basi secondo che la $F(x', x'', x''' \ldots x^h)$ sarà una funzione pari o dispari delle variabili $x', x'', x''' \ldots x^h$, e saranno zero tutte le $S\{A\}$. Quando in una funzion simetrica S si fanno due o più basi eguali fra loro lasciando disuguali gli indici, il risultato si riduce della forma HQ, ove H è un coefficiente numerico, e la Q una funzione che si conserva simetrica rispetto agl' indici, e cessa di esser tale rispetto alle basi. All' incontro quando si suppongono due o più indici eguali fra loro, mantenendosi disuguali le basi, il risultato è parimente ridotto alla forma HQ, ove la H è un coefficiente numerico, e la Q un aggregato di gruppi che si conserva simetrico rispetto alle basi, e cessa di esserlo rispetto agl' indici. Nelle simetriche complesse può accadere che il risultato si riduca a zero quando si stabilisca l' eguaglianza anche fra sole due basi. Così per es. il prodotto $A'A''A''' \ldots A^h = P$ nell' adottata significazione della A sarà una funzione simetrica od un' alternata secondo che h sarà pari o dispari. Se si suppone che due basi qualunque h, k divengano eguali, risulterà $Q = 0$, e ciò in forza della proprietà di una funzione alternata di ridursi a zero quando si riducono eguali due basi qualunque, come vedremo quì appresso.

47. In luogo di stabilire fra i diversi gruppi della R_n una relazione di somma col far precedere a tutti i gruppi il segno $+$, si formi in vece l' aggregato che risulta dal porre il segno $+$ innanzi a que' gruppi che possono derivarsi dal gruppo fondamentale ordinato con un numero pari di alternazioni, ed il $-$ innanzi a quelli che derivano dal fondamentale con un numero dispari.

L'aggregato di tali gruppi fatti di un numero $= n$ di basi verrà rappresentato colla notazione $D\{(a)^a(b)^b(c)^c\ldots,(y)^y(z)^z\}$ ovvero semplicemente con $D(n)$, ed anche ammettendo che g rappresenti la serie $a\,b\,c\,d\ldots y\,z$ delle basi e degli indici, verrà espresso colla notazione $D(g)^g$. Ciascuna di queste si chiamerà *alternante completa*. In generale si riterrà positivo un gruppo qualunque affetto dal simbolo D quando anche non sia il gruppo fondamentale $(g)^g$.

48. Siccome pel § 21 il numero d'alternazioni atte a trasformare il gruppo fondamentale ordinato in un gruppo qualunque G è $= n-m$, così se si appone il segno $+$ a tutti i gruppi ne' quali la differenza $n-m$ è pari, ed il $-$ a tutti quelli in cui la detta differenza è dispari, si otterrà lo stesso aggregato $D\{(a)^a(b)^b(c)^c\ldots(z)^z\}$. Si stabilisce tacitamente che $n-m=0$ sia da considerarsi pari.

49. Ordinati i gruppi della R_n nelle due serie M, N come nel § 30, se vi si appongono i segni ai diversi gruppi secondo la regola del precedente paragrafo, ne risulterà che tutti i gruppi della serie M saranno affetti da segni contrarj dei rispettivi gruppi alternati della serie N. Di fatto in forza del § 31 se si considerano due gruppi qualunque G, G' alternati fra loro, uno nella serie M, l'altro nella N, e sia m il numero de' rientranti di G, sarà $m\pm 1$ quello di G'. Il segno di G dipenderà dalla differenza $n-m$, quello di G' da $n-(m\pm 1)$, dunque se $n-m$ sarà pari, $n-m\mp 1$ sarà dispari e viceversa. Perciò i due gruppi G, G' avranno segni opposti.

50. L'aggregato $D\{(a)^a(b)^b(e)^c\ldots(z)^z\}=D(g)^g=D(n)$ è una funzione alternata rispetto alle basi. Di fatto considerati due gruppi G, G' nelle due serie M, N ordinate per due basi qualunque h, k, alternando le dette basi, tutti i gruppi della M si cambiano in quelli della N e viceversa § 30; dunque l'aggregato totale diverrà eguale e di

segno contrario al precedente. Se si fossero scelte per ordinare le serie due altri basi p, q, si direbbe ancora lo stesso. Dunque il proposto aggregato è una funzione alternata.

51. Ne deriva inoltre che se nelle stesse serie M, N in luogo di alternar le due basi h, k si pone da per tutto h in luogo di k, siccome a due a due i gruppi delle dette serie diventano eguali e di segno contrario, il risultato di questa sostituzione sarà zero, e perciò diverrà zero la

$$D\left\{(a)^a(b)^b\ldots\ldots(z)^z\right\}.$$

52. Il metodo indicato indietro onde ottenere le diverse espressioni R_n, $S(n)$, $D(n)$ che rappresenteremo con

$$R_n = a\left\}b\right\}c\left\}\ldots\ldots z\right\}_r, \qquad S(n) = a\left\}b\right\}c\left\}\ldots\ldots z\right\}_s,$$

$$D(n) = a\left\}b\right\}c\left\}\ldots\ldots z\right\}_d$$

è un' operazione non meno analitica di quello che lo siano le diverse operazioni algebriche. Ritenuto pertanto che la S indichi l' operazione stessa con cui si è formata la R_n, facendo precedere il segno $+$ a ciascun gruppo e la D, l'operazione stessa facendo precedere ai diversi gruppi il segno $+$ o il segno $-$ secondo che un gruppo qualunque G composto di m rientranti darà la differenza $n-m$ pari o dispari, questi simboli S e D apposti ad un gruppo fondamentale indicheranno sia le anzidette operazioni da eseguirsi, sia i risultati delle operazioni stesse.

53. La funzione $D\left\{(a)^a(b)^b\ldots\ldots(z)^z\right\}$ rimane invariata coll' invertere tutti i suoi gruppi. Di fatto la R_n rimane invariata coll' invertere i suoi gruppi § 35. Ma pel § 12 l' inversione eseguita sui rispettivi gruppi lascia inalterato il numero dei rientranti in essi gruppi compresi; ma il segno che si deve apporre a ciascun gruppo della R_n per convertirla in $D(n)$ dipende dal numero de' rientranti in esso compresi;

dunque tutti quei gruppi che nella $D\left\{(a)^a(b)^b\ldots.(z)^z\right\}$ avevano segni positivi, avranno ancor segno potitivo nell' invertita di D, e quelli che avevano segno negativo, avran pure il segno negativo nell' invertita della D, perciò la proposta D rimarrà invariata. Chiamata D_i l' invertita di D, sarà $D_i = D$. Ciò si vede anche dall' osservare che un gruppo qualsivoglia nel passare a divenir invertito porta seco il segno da cui esso è derivato non ostante che il gruppo in sè stesso cambi di valore.

54. Se $D_p(n)$ è il risultato di un numero p di alternazioni successive eseguite fra le basi della $D(n)$, sarà $D_p(n) = \pm D(n)$, ove varrà il $+$ o il $-$ secondo che p sarà pari o dispari. Siccome indicando con

$$D_1(n),\ D_2(n),\ D_3(n)\ldots.D_p(n)$$

i risultati di una, due, tre $\ldots.p$ alternazioni sulla $D(n)$, sarà

$$D_1(n) = -D(n)$$

$$D_1D_1(n) = D_2(n) = -D_1(n) = +D(n)$$

$$D\,D_2(n) = D_3(n) = -D_2(n) = -D(n)$$

$$D\,D_3(n) = D_4(n) = -D_3(n) = +D\,n$$

e così di seguito sino a p, cioè

$$D\,D_{p-1}(n) = D_p(n) = -D_{p-1}(n) = \pm D(n),$$

così ne risulta che il segno di $D(n)$ nel 2.° membro sarà $+$ o $-$ secondo che p sarà pari o dispari.

55. Se $D^q(n)$ indica il risultato di q alternazioni eseguite successivamente sugl' indici della $D(n)$, sarà $D^q(n) = \pm D(n)$, valendo il $+$ o il $-$ secondo che q sarà pari o dispari. Di fatto si contemplino nella proposta $D(n)$ due indici h, k, e s' indichi $D(n)$ con $D^{h,k}(n)$. Sia $D^{k,h}(n)$ il risultato

di una alternazione eseguita sugl'indici h, k della $D(n)$. Sia $D_{h,k}(n)$ l'invertita di $D^{h,k}(n)$, sarà § 53

$$D^{h,k}(n) = D_{h,k}(n) \qquad (a).$$

Alternando in quest'ultima le due basi h, k, ed indicando il risultato con $D_{k,h}(n)$, sarà pel § 58

$$D_{k,h}(n) = -D_{h,k}(n) \qquad (b).$$

Se si chiama X l'invertita di $D_{h,k}(n)$, si avrà § 53 $X = D_{h,k}(n)$. Ma è evidente che la X non è altro che il risultato dell'alternazione degl'indici h, k nella proposta $D^{h,k}(n)$, ossia sarà quella denominata $D^{k,h}(n)$, e si avrà $X = D^{k,h}(n)$; dunque colla

$$D_{h,k}(n) = D^{k,h}(n)$$

e colla (b) risulterà

$$D_{h,k}(n) = -D_{k,h}(n) = -D^{k,h}(n).$$

Sostituendo per $D_{h,k}(n)$ nel 1.° membro di questa il valore $D^{h,k}(n)$ dato dalla (a), si avrà

$$D^{k,h}(n) = -D^{h,k}(n), \qquad (c).$$

Chiamando ora $D^1(n)$ il risultato di un'alternazione eseguita su due indici della $D(n)$, si avrà dalla (c)

$$D^1(n) = -D(n),$$

e seguendo l'andamento stesso del § 54, indicando con

$D^2(n)$, $D^3(n) \ldots D^q(n)$ i risultati di $1, 2, 3 \ldots q$

alternazioni negl'indici, si avrà come ivi

$$\begin{aligned}
D^1(n) &= -D(n) \\
D^2(n) &= -D^1(n) &&= +D(n) \\
D^3(n) &= -D^2(n) &&= -D(n) \\
&\vdots \\
D^q(n) &= -D^{q-1}(n) &&= \pm D(n),
\end{aligned}$$

ove si vede che nell'ultima si dovrà prendere il segno $+$ o il $-$ secondo che q sarà pari o dispari.

56. Ne deriva che la $D(n) = D(g)^s$ è una funzione alternata non solo rispetto alle basi, ma ancora rispetto agli indici. Ha inoltre la proprietà di ridursi a zero non solo quando si fanno eguali fra loro due basi qualunque nei gruppi risultanti dallo sviluppo della $D(n)$, ma anche quando si suppongono eguali due indici qualunque.

57. Sia $D_p^q(n)$ il risultato di p alternazioni successive eseguite fra le basi, e di q alternazioni fra gl'indici nella $D(n)$, si avrà $D_p^q(n) = \pm D(n)$, valendo il $+$ od il $-$ secondo che $p+q$ sarà pari o dispari. Di fatto partendo dal risultato del § 54 e ripetuto su di esso ciò che si è detto nel § 55 rispetto agl'indici, e riflettendo che sarà $p+q$ numero pari, quando p, q saranno entrambi pari ed entrambi dispari, e che sarà $p+q$ numero dispari quando uno dei due p, q sarà pari e l'altro dispari, ne risulta l'enunciata proposizione. È da avvertirsi inoltre che sarà indifferente il far precedere le q alternazioni fra gl'indici o le p alternazioni fra le basi.

58. Ritenute le denominazioni de' paragrafi precedenti, si avrà

$$D_p^q(n) = D_{p+q}(n) = \pm D(g)^s,$$

ove avrà luogo il segno $+$ od il $-$ secondo che $p+q$ sarà pari o dispari. Di fatto si ha pei §§ 54 e 55 $D^p(n) = \pm D(n)$ $D^q(n) = \pm D(n)$, fatto $p = q$, sarà $D^q(n) = D_q(n) = \pm D(n)$ ove varrà il $+$ od il $-$ secondo che q sarà pari o dispari. Si eseguisca sulla precedente eguaglianza un numero p d'alternazioni fra le basi, sarà

$$D_p^q(n) = D_{q+p}(n) = \pm\left(\pm D(n)\right) = \pm D(n)$$

ove avrà luogo il segno superiore se p, q saranno entrambi

pari od entrambi dispari, e l'inferiore se sarà uno di essi pari e l'altro dispari, val quanto dire avrà luogo il segno $+$ od il $-$ secondo che $p+q$ sarà pari o dispari, ciò che s'accorda coll'equazione $D_p^q(n) = \pm D(n)$ data al paragrafo antecedente e colla $D_{q+p}(n) = \pm D(n)$ che risulta da quella del § 54 quando in essa in luogo del numero qualunque p si sostituisca $q+p$.

59. Dal modo con cui nel § 7 si sono derivati i diversi gruppi della R_n coll'operazione indicata dal simbolo

$$a\}b\}c\}d\}\ldots\ldots y\}z\}_r$$

risulta non essere necessario l'ordine progressivo delle lettere stesse, e che si giunge sempre allo stesso risultato comunque nel simbolo stesso si alternino fra loro in qualsivoglia modo le lettere della serie g partendo per es. dall'operazion simbolica

$$c\}b\}a\}y\}\ldots\ldots d\}z\}_r.$$

Parimente rappresentando con g' una serie qualunque delle lettere stesse, per es. $g' = c\,b\,a\,y\ldots d\,z$, risulterebbe dallo sviluppo della

$$c\}b\}a\}y\}\ldots\ldots d\}z\}_d = D(g')^g$$

lo stesso risultato che fornisce lo sviluppo della

$$a\}b\}c\}d\}\ldots\ldots y\}z\}_d = D(g)^g,$$

purchè nell'applicare i segni ai diversi gruppi che ne nascono si segua la regola del § 48, secondo la quale il gruppo fondamentale $(g)^g$ comparirà affetto dal segno positivo. Ma siccome si è adottato indietro di ritener positivo il gruppo $(g')^g$ affetto dal simbolo D, così chiamando p il numero delle alternazioni per passare da $(g')^g$ al gruppo fondamentale $(g)^g$, si avrà pel § 54

$$D_p(n) = D_p(g)^g = \pm D(n) \quad \text{ossia} \quad D(g')^g = \pm D(g)^g$$

ove avrà luogo il segno $+$ od il $-$ secondo che sarà pari o dispari il numero delle alternazioni per passare dal gruppo $(g')^g$ al fondamentale $(g)^g$, o in altri termini secondo che sarà pari o dispari la differenza $n-m$, essendo m il numero de' rientranti del gruppo $(g')^g$. In tal caso il gruppo $(g')^g$ nello sviluppo della $\pm D(n)$ comparirà sempre affetto dal segno $+$ come è richiesto.

60. Dietro le stabilite convenzioni si avrà in generale $D(g')^g = \pm D(g'')^g$ ove $(g')^g$, $(g'')^g$ rappresentano due gruppi qualunque, ed ove avrà luogo il segno $+$ od il $-$ secondo che $m'+m''$ sarà pari o dispari, essendo m', m'' il rispettivo numero di rientranti dei gruppi stessi; od anche secondo che la differenza $n-\mu$ sarà pari o dispari, rappresentando μ il numero de' rientranti del nuovo gruppo $(g')^{g''}$. Di fatto la condizione necessaria onde si avveri la proposta eguaglianza si è che negli sviluppi delle $D(g')^g$ e $D(g'')^g$ il gruppo fondamentale $(g)^g$ che ne verrà prodotto sia in ambo i membri affetto dallo stesso segno; ora se sarà $m'+m''$ pari, sarà manifestamente pari il numero

$$2n-(m'+m'')=(n-m')+(n-m'')$$

ossia i numeri $n-m'$ ed $n-m''$ saranno entrambi pari od entrambi dispari; ma ciò essendo, gli sviluppi anzidetti danno entrambi il gruppo $(g)^g$ affetto dallo stesso segno, e perciò converrà adottare il segno superiore acciò la proposta equazione sia verificata; se in vece $m'+m''$ sarà dispari, tale sarà pure il numero $(n-m')+(n-m'')$, ossia dovrà uno dei numeri $n-m'$, $n-m''$ essere pari, e l'altro dispari. Ma in tal caso gli sviluppi anzidetti danno il gruppo $(g)^g$ affetto da segni contrarj, dunque perchè la proposta si avveri dovrà adottarsi il segno inferiore.

Il secondo criterio rispetto al doppio segno deriva dal riflettere che il minor numero d'alternazioni per passare dal

gruppo $(g')^g$ al gruppo $(g'')^g$ è dato da $n-\mu$, essendo μ il numero dei rientranti del nuovo gruppo $(g')^{g''}$ § 23. Ma se N è il numero d'alternazioni qualunque per passare dal 1.° al 2.° gruppo senza la condizione che debba essere minimo, si ha $N = n - \mu + 2\sigma$, essendo σ il numero arbitrario delle alternazioni superflue § 24. Se supponiamo che 2σ corrisponda a quel numero d'alternazioni che sarebbero necessarie per passare dal 1.° al 2.° gruppo colla condizione di dover passare pel gruppo intermedio $(g)^g$, si avrà dal § 23 $N = 2n - (m' + m'')$, ora dall'eguaglianza $2n - (m' + m'') = n - \mu + 2\sigma$ risulta che $m' + m''$ sarà pari o dispari insieme con $n - \mu$. Perciò nella proposta equazione avrà luogo il segno superiore od inferiore secondo che $n - \mu$ sarà pari o dispari.

61. Ritenuto che la g indichi la serie ordinata delle n lettere $a\,b\,c \ldots . x\,y\,z$, e la g' una serie nata da un numero qualunque di alternazioni fra le stesse lettere, per es.

$$g' = x\,a\,y\,b\,c \ldots . h\,z\,k\,l\,d \ldots . u\,v,$$

il gruppo fondamentale è espresso, come già si è fatto, con $(g)^g$ ed un gruppo qualunque con $(g')^g$. Nella serie g o nella g' si dirà che una delle sue lettere è in posto pari od in posto dispari secondo che contando le lettere da destra a sinistra occupa nella g o nella g' un posto pari o dispari. Potendo le g, g' rappresentare o serie di basi, o serie d'indici, così si dirà base od indice di posto pari o dispari secondo che pari o dispari sarà il posto che occupa nella g o nella g', considerate come serie di basi, o come serie d'indici. Indicheremo con π il numero del posto quando si tratta di basi, e con π' quando si tratti d'indici.

Quando nella serie g o g' vogliamo che sia ommessa una lettera, per es. la lettera p nella g, e la z nella g', la serie delle restanti $n-1$ lettere sarà espressa per

compendio con $g-p$ e $g'-z$. Così ritenuto che g' rappresenti l'anzidetta serie, le espressioni $g-p$, $g'-z$ si dovranno interpretare come segue.

$$g-p = a\,b\,c\,\ldots\ldots\,m\,n\,q\,r\,\ldots\,x\,y\,z$$

$$g'-z = x\,a\,y\,b\,c\,\ldots\,h\,k\,l\,d\,\ldots\,u\,o.$$

Se la base p tolta dal suo posto che occupa nella g sarà traslocata ad uno dei due estremi della serie stessa g, ciò sarà espresso con $(g-p)p$ ovvero con $p(g-p)$, e postavi la serie g degl' indici, sarà

$$\big((g-p)p\big)^g = (a)^a(b)^b\ldots\ldots(m)^m(n)^n(q)^p(r)^q\ldots(y)^x(z)^y(p)^z = (g-p)^{g-z}(p)^z$$

$$\big(p(g-p)\big)^g = (p)^a(a)^b(b)^b\ldots(m)^n(n)^p(q)^q(r)^r\ldots(x)^z(y)^y(z)^z = (g-p)^{g-a}(p)^a$$

Il gruppo $(g-z)^{g-p}$ fatto di $n-1$ elementi sarà dato da

$$(g-z)^{g-p} = (a)^a(b)^b(c)^c\ldots(n)^n(p)^q(q)^q\ldots(x)^y(y)^z.$$

Parimente si avrà

$$\big((g-k)k\big)^{g-p+1} = (g-k)^{g-p}(k)^p = (a)^a(b)^b\ldots(h)^h(i)^i(l)^k(m)^l(n)^m(p)^n(q)^q\ldots(y)^y(z)^z(k)^p$$

Siccome un gruppo qualunque non cambia di valore traslocando uno qualunque de' suoi elementi §. 9., così l'ultima espressione equivale alla

$$(a)^a(b)^b\ldots(h)^h(i)^i(l)^k(m)^l(n)^m(p)^n(k)^p(q)^q\ldots(y)^y(z)^z$$

ove la serie degl' indici è $= g$. Dunque l'espressione $(g-k)^{g-p}(k)^p$ nasce dal traslocamento nel gruppo $(g)^g$ della base k sotto l'indice p o dalla semplice traslocazione di k fra le due basi p, q. Le stesse notazioni serviranno pure quando si rimpiazza la g con g'. Se per fissare le idee si ritiene per g' la serie data in principio, si avrà

$$\left((g'-z)z\right)^{g} = (g'-z)^{g-z}(z)^{z} = (x)^{a}(a)^{b}(y)^{c}(b)^{d}(c)^{e}\ldots(h)^{n}(k)^{p}(l)^{m}(d)^{q}\ldots(u)^{y}(v)^{z}(z)^{z}$$

Parimente

$$\left((g'-z)z\right)^{(g-p)p} = (g'-z)^{g-p}(z)^{p} = (x)^{a}(a)^{b}(y)^{c}(b)^{d}(c)^{e}\ldots(h)^{l}(k)^{m}(l)^{n}(d)^{q}\ldots(u)^{y}(v)^{z}(z)^{p}$$

e traslocato l'elemento $(z)^{p}$, onde si riproduca la serie ordinata g degl' indici, si avrà

$$(g'-z)^{g-p}(z)^{p} = (x)^{a}(a)^{b}(y)^{c}(b)^{d}(c)^{e}\ldots\ldots(h)^{l}(k)^{m}(l)^{n}(z)^{p}(d)^{q}\ldots\ldots(u)^{y}(v)^{z}$$

il quale non è che la traslocazione nel gruppo $(g')^{g}$ della base z sotto l'indice p ossia la traslocazione di z nello spazio intermedio fra l, d. Così pure sarà

$$(g'-h)^{g-p}(h)^{p} = (x)^{a}(a)^{b}(y)^{c}(b)^{d}(c)^{e}\ldots\ldots(z)^{l}(k)^{m}(l)^{n}(d)^{q}\ldots\ldots\ldots\ldots(u)^{y}(v)^{z}(h)^{p}$$

ossia $\quad = (x)^{a}(a)^{b}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(z)^{l}(k)^{m}(l)^{n}(h)^{p}(d)^{q}\ldots\ldots(u)^{y}(v)^{z}.$

Vedesi qui rappresentato il traslocamento della h sotto l'indice p eseguito nel gruppo $(g')^{g}$. In generale il gruppo $(g')^{g'}$ si cambia nel gruppo $\left((g'-k)k\right)^{g'}$ o nel gruppo $\left(k(g'-k)\right)^{g'}$, secondo che la base k nella serie g' delle basi si trasporta all'estremità destra o sinistra della serie stessa. Quando in vece la stessa k è traslocata fra due basi qualunque in modo che applicatavi la serie g' degl' indici cada la k sotto l'indice p di posto π', il gruppo che ne nasce sarà espresso da $(g'-k)^{g'-p}(k)^{p}$. Una tale disposizione dirassi traslocazione d'una base k sotto un indice di posto π'.
Le precedenti notazioni dovranno ritenersi anche quando i gruppi vengano affetti dal simbolo D. Così sarà

$$D(g-z)^{g-z} = D\left\{(a)^{a}(b)^{b}\ldots\ldots(x)^{x}(y)^{y}\right\}$$
$$D(g-z)^{g-y} = D\left\{(a)^{a}(b)^{b}\ldots\ldots(x)^{x}(y)^{z}\right\}$$

vale a dire che eseguite le alternazioni fra le basi $g-z$,

ciascun gruppo che nasce dall'operazione D dev'essere affetto dalla stessa serie d'indici indicata da $g-y = abc\ldots xz$. Parimente l'espressione $D(g-z)^{g-p}(z)^p$ significa che a ciascun gruppo nato dallo sviluppo dell'alternante di $n-1$ basi $D(g-z)^{g-p}$ dietro il § 52 deve aggregarsi od interporsi l'elemento $(z)^p$.

62. Rappresentando con g_1 una serie di η lettere comunque non ordinate, per esempio $kv\ldots bp$, le $\eta-4$ lettere intermedie essendo sottintese, ciascuno dei gruppi

$$\big((g_1-k)k\big)^{g_1}, \quad \big(p(g_1-p)\big)^{g_1}$$

derivati da $(g_1)^{g_1}$, il 1.° colla traslocazione della base k sotto l'indice p di posto $\pi'=1$, ed il 2.° colla traslocazione della base p sotto l'indice k di posto $\pi'=\eta$, ossia colla traslocazione di k o di p alle loro estremità opposte, consta di un solo rientrante. Di fatto si distribuisca la serie delle basi $kv\ldots bp$ sul cerchio interno della fig. (a) del § 9 e l'egual serie d'indici $kv\ldots bp$ sul cerchio esterno nello stesso modo come si è fatto in quel paragrafo delle lettere $q\,z\,y\,t\,s\,p\,a\,r$. Si faccia una rotazione da destra a sinistra nel cerchio interno onde derivarne una disposizione analoga alla fig. (b). Il gruppo $(p^k k^p\ldots b^p)$ che ne risulta della lettura fatta da destra a sinistra come ivi è indicato è equivalente al gruppo $\big(p(g_1-p)\big)^{g_1}$. Fatta in vece la rotazione da sinistra a destra, il gruppo che vien formato dalla lettura da destra a sinistra è dato da $(v^k\ldots p^b k^p)$ che equivale a $\big((g_1-k)k\big)^{g_1}$. Ciascuno di questi gruppi consterà di un solo rientrante, giacchè tutti i gruppi nati dalla fig. (b) in qualunque verso se ne faccia la lettura danno origine ad un sol gruppo rientrante di specie eguale al numero delle lettere impiegate nella distribuzione circolare.

63. Ne deriva che se nei gruppi $(g)^g$, $(g')^{g'}$ una base k di posto π è traslocata sotto un indice di posto π' ossia

va ad occupare un posto intermedio fra la base d'indice p e la susseguente che incontra nella direzione del suo spostamento, la serie delle basi spostate ha subita una rotazione analoga a quella del precedente paragrafo. Gli elementi fissi in numero $\delta + 1$ divenuti variabili formano un rientrante solo di $(\delta + 1)^{esimo}$ specie, essendo δ il valor numerico di $\pi - \pi'$, ed il numero degli elementi fissi o rientranti di 1.ª specie nel nuovo gruppo sarà ridotto ad $n - (\delta + 1)$.

64. Il numero delle alternazioni fra le basi per passare dal gruppo $(g - k)^{g-p}(k)^p$ al fondamentale $(g)^g$ o viceversa sarà eguale a δ, essendo δ il valor numerico di $\pi - \pi'$; indicando π il numero del posto della base k nella serie g delle basi e π' quello dell'indice p nella serie g degli indici. Di fatto dietro il § 61 il gruppo in quistione equivale alla traslocazione nel gruppo $(g)^g$ della base k sotto l'indice p. Il numero de' rientranti di 1.ª specie sarà ridotto ad $n - (\delta + 1)$, ed il complesso degli elementi variabili ad un rientrante solo § 63. Il numero m de' rientranti del proposto gruppo sarà $= n - (\delta + 1) + 1 = n - \delta$, e perciò il numero $n - m$ delle alternazioni cercate sarà eguale a δ.

65. Parimente il numero d'alternazioni fra le basi per passare dal gruppo $(g' - k)^{g'-p}(k)^p$ al gruppo $(g')^{g'}$ o viceversa sarà eguale a δ, essendo δ il valor numerico di $\pi - \pi'$, ove π indica il numero del posto della base k nella serie g' delle basi, e π' quello dell'indice p nella serie g' degl'indici, ed il numero de' rientranti del proposto gruppo sarà eguale ad $n - \delta$. Di fatto il gruppo in quistione nasce dal traslocamento di k sotto l'indice p eseguito nel gruppo $(g')^{g'}$. Gli elementi variabili che ne nascono formano un rientrante solo prodotto da una rotazione simile a quella di cui si è parlato ai §§ 62 e 63, valendo le stesse conseguenze rispetto a $(g')^{g'}$ come rispetto a $(g)^g$. Ripetuto lo stesso discorso del § 64 col sostituire $(g')^{g'}$ a $(g)^g$, si giungerà alle stesse conseguenze.

66. Se nel gruppo del § 64 si pone z in luogo di k, si ha $\pi = 1$, $\delta = \pi' - 1$, onde il numero m de' rientranti del gruppo $(g-z)^{g-p}(z)^p$ sarà dato da $m = n - \pi' + 1$, ed il numero delle alternazioni per passare da questo al fondamentale $(g)^g$ sarà dato da $n - m = \pi' - 1$.

Supposto sostituita la z alla p, sarà $\pi' = 1$, $\delta = \pi - 1$, onde il numero m de' rientranti del gruppo

$(g-k)^{g-z}(k)^z = \big((g-k)k\big)^g$ sarà dato da $m = n - \pi + 1$,

ed il numero d'alternazioni per passare da esso al fondamentale $(g)^g$ sarà pure dato da $n - m = \pi - 1$.

Se si pone nel gruppo stesso del § 64 in luogo di p la α, sarà $\pi' = n$, $\delta = n - \pi$. Il numero m de' rientranti del gruppo $(g-k)^{g-\alpha}(k)^\alpha = \big(k(g-k)\big)^g$ sarà dato da $m = \pi$, ed il numero delle alternazioni per passare da questo a $(g)^g$ sarà dato da $n - m = n - \pi$.

Parimente se nel gruppo del § 65 si sostituisce alla k la lettera z ed alla p quell'indice con cui termina la serie g', sarà $\pi' = 1$, $\delta = \pi - 1$, ove π sarà il posto che occupa z nella serie g'. Il numero μ di rientranti del gruppo $\big((g'-z)z\big)^{g'}$, al quale si riduce il gruppo $(g'-k)^{g'-p}(k)^p$, sarà dato da $\mu = n - \delta = n - (\pi - 1)$ ed il numero d'alternazioni per passare da esso al gruppo $(g')^{g'}$ sarà dato da $n - \mu = \pi - 1$.

67. Il numero delle alternazioni per passare dal gruppo $(g'-z)^{g-z}(z)^z$ al gruppo $(g')^g$ o viceversa sarà dato da $\pi' - 1$, essendo π' il posto dell'indice da cui la z è affetta nel gruppo $(g')^g$ ovvero da $\pi - 1$, essendo π il numero del posto di z nella serie g'. Di fatto il gruppo proposto equivale a $\big((g'-z)z\big)^g$. Il numero adunque di alternazioni per passare da questo al gruppo $(g')^g$ sarà dato da $n - \mu$, essendo μ il numero de' rientranti del nuovo gruppo $\big((g'-z)z\big)^{g'}$ § 23. Ora pel paragrafo antecedente

si ha $\mu = n - (\pi - 1)$, dunque $n - \mu = \pi - 1$ od anche eguale a $\pi' - 1$ per essere $\pi = \pi'$.

68. Supposto che la base z nel gruppo $(g')^g$ sia affetta dall'indice p, si chiami π' il numero comune sia del posto di p nella serie g, sia di z nella serie g', e si chiami α il numero delle alternazioni per passare da $(g')^g$ al fondamentale $(g)^g$, finalmente sia λ il numero delle alternazioni fra le $n - 1$ basi per passare dal gruppo $(g' - z)^{g-p}$ al gruppo $(g - z)^{g-p}$. Sarà α un numero pari o dispari secondo che pari o dispari sarà il numero $\lambda + \pi' - 1$. Di fatto il gruppo $(g')^g$ potrà in tal caso mettersi sotto la forma $(g' - z)^{g-p}(z)^p$. Ora il numero λ di alternazioni eseguite nella $(g' - z)^{g-p}$ lo trasformerà prima in $(g - z)^{g-p}(z)^p$, poscia un numero ulteriore di alternazioni $= \pi' - 1$ lo trasformerà in $(g)^g$ § 66. Ma siccome un tal ordine di alternazioni che conduce $(g')^g$ a $(g)^g$ potrebbe contenere un numero σ di alternazioni superflue, così il numero cercato α per passare da $(g')^g$ a $(g)^g$ sarà dato § 24 da $\alpha = \lambda + \pi - 1 - 2\sigma$. Sarà dunque α pari o dispari secondo che pari o dispari sarà il numero $\lambda + \pi' - 1$.

69. L'alternante $D(g)^g$ fatta di n basi potrà ordinarsi per gli elementi affetti dalla stessa base z in un polinomio di n termini a segni alternativi espressi da alternanti $D(n-1)$ dell'ordine immediatamente inferiore colla formola

$$D(g)^g = \left\{ \begin{array}{l} D(g-z)^{g-z}(z)^z - D(g-z)^{g-y}(z)^y + D(g-z)^{g-x}(z)^x - \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \pm D(g-z)^{g-p}(z)^p \cdots \pm D(g-z)^{g-a}(z)^a \end{array} \right\} \quad (b)$$

ove nel termine generico $\pm D(g - z)^{g-p}(z)^p$ avrà luogo il $+$ o il $-$ secondo che il posto π' dell'indice p sarà dispari o pari, e nell'ultimo termine avrà luogo il $+$ o il $-$ secondo che n sarà dispari o pari. Di fatto si supponga che la serie arbitraria degl'indici nello sviluppo della $a\}b\}\ldots y\}_g$ sia $g - p$, essendo p uno qualunque degl'indici

della g. Si avrà in questa ipotesi $a\}b\}\ldots y\}_d = D(g-z)^{g-p}$, ed un gruppo qualunque di questo sviluppo sarà dato da $(-1)^{\lambda}(g'-z)^{g-p}$, ove λ esprima il numero delle alternazioni per passare dal gruppo $(g'-z)^{g-p}$ al gruppo $(g-z)^{g-p}$. Si consideri ora lo sviluppo della

$$a\}b\}c\}\ldots y\}z\}_d = D(g)^g$$

come formato dagli n termini che nascono dal portare la z dietro il § 7 all'estremità destra di ciascun gruppo della $a\}b\}\ldots y\}_r = R_{n-1}$ indi al 1.° spazio intermedio, poi al 2.°, 3.° .... $(n-2)^{\text{esimo}}$, finalmente all'estremità a sinistra, cioè dal portare z sotto il 1.°, 2.°, 3.° .... n° indice nell'aggregato di gruppi nati dalla $a\}b\}c\ldots y\}_r$ supposta affetta dalle serie g degl'indici. Sia il termine generico quello in cui la z è affetta dall'indice p. Un gruppo qualunque di questo termine generico sarà dato dietro il § 68 da

$$(-1)^{\lambda+\pi'-1}(g'-z)^{g-p}(z)^p = (-1)^{\lambda}(g'-z)^{g-p}(-1)^{\pi'-1}(z)^p.$$

Ma la parte $(-1)^{\lambda}(g'-z)^{g-p}$ è un gruppo nato dallo sviluppo della $D(g-z)^{g-p}$. Dunque il gruppo in quistione avrà lo stesso segno o segno contrario al precedente secondo che $\pi'-1$ sarà pari o dispari, cioè secondo che π' sarà dispari o pari. Dunque anche l'aggregato dei gruppi della $D(g-z)^{g-p}(z)^p$ sarà affetto dal segno $+$ o dal $-$ secondo che π' sarà dispari o pari. Val quanto dire che nel termine generico $\pm D(g-z)^{g-p}(z)^p$ dovrà valere il $+$ o il $-$ secondo che π' sarà dispari o pari. Se ora si suppone $\pi' = 1, 2, 3, \ldots n$ e per conseguenza $p = z, y, x \ldots a$, si avrà il polinomio di n termini che rappresenta lo sviluppo della $D(g)^g$. L'ultimo termine corrispondente a $p = a$ darà $\pi' = n$, e perciò sarà affetto dal $+$ o dal $-$ secondo che n sarà dispari o pari. Si avrà dunque la $D(g)^g$ espressa come si è annunciato, ove è da notarsi che l'alternante $D(g-z)^{g-p}$, indicando p uno qualunque degli

indici della g, equivale allo sviluppo della $a\}b\}c\}\ldots y\}_d$ ove a ciascun gruppo sia apposta la serie $g-p$ degl' indici.

70. Siccome un' alternante $D(n)$ dietro il precedente sviluppo dipende da un' alternante di ordine immediatamente inferiore $D(n-1)$, così questa dipenderà da una inferiore $D(n-2)$ e così via via sino all' alternante $D(2)$. Ne deriva per la formazione di un' alternante di un dato numero di basi la seguente regola semplice ed uniforme senza ricorrere ai rientranti del § 48. Ad ogni traslocazione dell' ultima base nei gruppi già formati affetti dai segni che competono all' alternante inferiore si dovranno assumere i nuovi gruppi cogli stessi segni o con segni contrarj a quelli da cui derivano secondo che il posto che la base introdotta occupa sarà dispari o pari. Così supposto che siansi sostituite alla serie g le diverse

$$g_2 = ab, \quad g_3 = abc, \quad g_4 = abcd, \ldots$$

per cui è rispettivamente $n = 2, 3, 4 \ldots$, si avrà

$$D(2) = a\}b\}_d = (ab-ba)^{g_2} = (a)^a(b)^b - (b)^a(a)^b$$

$$D(3) = a\}b\}c\}_d = (ab-ba\}c\}_d = \big((abc-bac)-(acb-bca)+(cab-cba)\big)^{g_3}$$

$$= (a)^a(b)^b(c)^c - (b)^a(a)^b(c)^c - (a)^a(c)^b(b)^c + (b)^a(c)^b(a)^c + (c)^a(a)^b(b)^c - (c)^a(b)^b(a)^c$$

$$D(4) = a\}b\}c\}d\}_d = (abc-bac-acb+bca+cab-cba\}d\}_d$$

$$= \big(abcd-bacd-acbd+bcad+cabd-cbad\big)^{g_4}$$

$$-\big(abdc-badc-acdb+bcda+cadb-cbda\big)^{g_4}$$

$$+\big(adbc-bdac-adcb+bdca+cdab-cdba\big)^{g_4}$$

$$-\big(dabc-dbac-dacb+dbca+dcab-dcba\big)^{g_4}$$

e così dicasi di seguito. Siccome inoltre un tale processo è

indipendente dall'ordine progressivo delle lettere della g, così la formazione di una qualunque alternante $D(g')^g$ sarà ancora soggetta alla precedente regola, solo che dietro le stabilite convenzioni comparirà positivo il gruppo $(g')^g$ da cui siamo partiti. In particolare se g' è rappresentato dalla serie data in principio del § 61, la $D(g')^g$ sarà data dallo sviluppo dell'espressione simbolica

$$x\}a\}y\}b\}c\}\ldots\}h\}z\}k\}l\}d\}\ldots\}u\}v\}_d$$

impiegando lo stesso antecedente processo riguardo al traslocamento delle basi e rispetto ai segni che debbono precedere i gruppi. Ciascun gruppo sarà poi affetto dalla serie g d'indici. Il gruppo di partenza

$$(g')^g = (x)^a\,(a)^b\,(y)^c\,(b)^d\,(c)^e\ldots\ldots(u)^y\,(v)^z$$

comparirà positivo, ed il gruppo fondamentale $(g)^g$ comparirà affetto dal segno $+$ o dal $-$ secondo che la differenza $n-m$ sarà pari o dispari essendo m il numero de' rientranti del gruppo $(g')^g$. Fu appunto per uniformarci ad un processo uniforme nello sviluppo di $D(g)^g$ o di $D(g')^g$ che si è ritenuto sempre positivo il gruppo di partenza $(g')^g$, comunque non sia esso il gruppo fondamentale. La relazione poi fra questi due sviluppi è data da $D(g)^g = \pm D(g')^g$ § 59, ove varrà il $+$ o il $-$ secondo che $n-m$ sarà pari o dispari.

71. L'alternante completa $D(g)^g$ può ordinarsi a seconda di una base qualunque h colla seguente formola

$$D(g)^g = \pm\left\{\begin{array}{l} D(g-h)^{g-z}(h)^z - D(g-h)^{g-y}(h)^y + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \pm D(g-h)^{g-p}(h)^p \ldots\ldots \pm D(g-h)^{g-a}(h)^a \end{array}\right\} \quad (b')$$

ove varrà il $+$ o il $-$ innanzi a $\}$ secondo che la base h nella serie g occupa un posto π dispari o pari,

e varrà il $+$ o il $-$ nel termine generico $\pm D(g-h)^{s-p}(h)^p$ secondo che il posto π' dell'indice p nella stessa g sarà dispari o pari, e nell'ultimo termine si piglierà il $+$ o il $-$ secondo che n sarà dispari o pari. Di fatto pei §§ 59 e 70 si ha $D(g)^s = \pm D(g')^s$, valendo il $+$ o il $-$ secondo che il numero delle alternazioni per passare da $(g')^s$ a $(g)^s$ sarà pari o dispari. Supposto $g' = (g-h)h$, il numero delle alternazioni per passare da $\big((g-h)h\big)^s$ a $(g)^s$ sarà pari o dispari secondo che dispari o pari sarà il numero π del posto che occupa la h nella serie g § 66; dunque nella $D(g)^s = \pm D\big((g-h)h\big)^s$ avrà luogo il $+$ o il $-$ secondo che π sarà dispari o pari. Considerando la serie di basi $(g-h)h$ come una serie in cui la h occupa il 1.° posto a destra, potrà la $D\big((g-h)h\big)^s$ ordinarsi a seconda della base h, come nella $D(g)^s = D\big((g-z)z\big)^s$ si è ordinata nel § 69 a seconda della base z, e ciò si otterrà rimpiazzando z con h nella (b). Si avrà così

$$D\big((g-h)h\big)^s = \left\{\begin{array}{l} D(g-h)^{s-n}(h)^n - D(g-h)^{s-y}(h)^y + \ldots \\ \ldots \pm D(g-h)^{s-p}(h)^p \ldots \pm D(g-h)^{s-q}(h)^q \end{array}\right\}$$

ove avrà luogo il $+$ o il $-$ nel termine generico secondo che il posto π' dell'indice p nella g sarà dispari o pari, e nell'ultimo termine secondo che n sarà dispari o pari. Si avrà quindi la formola (b') quando si ponga il precedente sviluppo nel 2.° membro della $D(g)^s = \pm D\big((g-h)h\big)^s$.

72. Se ora si suppone $\gamma = g\zeta = abc\ldots yz\zeta$, considerando una qualunque serie di n lettere data da $\gamma - h$, l'alternante completa $D(\gamma-h)^s$ potrà essere ordinata a seconda della nuova base ζ col mezzo della formola (b). Osservando inoltre essere $\gamma - h - \zeta = g - h$, si ottiene

$$D(\gamma-h)^s = \left\{\begin{array}{l} D(g-h)^{s-x}(\zeta)^x - D(g-h)^{s-y}(\zeta)^y + \ldots \\ \ldots \pm D(g-h)^{s-p}(\zeta)^p \ldots \pm D(g-h)^{s-q}(\zeta)^q \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

ove avrà luogo il $+$ o il $-$ nel termine generico secondo che il posto π' dell' indice p nella serie g sarà dispari o pari.

73. Dietro i riflessi dei §§ 53 e 56, se s' invertono tutti i gruppi delle formole (b), (b'), (β), si ottengono rispettivamente le seguenti (i), (i'), (β'), le quali forniscono gli sviluppi a seconda di uno stesso indice. Si ha cioè

$$D(g)^{g} = \left\{ \begin{array}{l} D(g-z)^{g-z}(z)^{z} - D(g-y)^{g-z}(y)^{z} + D(g-x)^{g-z}(x)^{z} - \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \pm D(g-p)^{g-z}(p)^{z} \cdots \pm D(g-a)^{g-z}(a)^{z} \end{array} \right\} \quad (i)$$

ove nel termine generico avrà luogo il segno $+$ o il $-$ secondo che il posto π della base p nella serie g sarà dispari o pari.

$$D(g)^{g} = \pm \left\{ \begin{array}{l} D(g-z)^{g-h}(z)^{h} - D(g-y)^{g-h}(y)^{h} + \cdots \\ \cdots \pm D(g-p)^{g-h}(p)^{h} \cdots \pm D(g-a)^{g-h}(a)^{h} \end{array} \right\} \quad (i')$$

ove avrà luogo il $+$ o il $-$ innanzi alla parentesi $\}$ secondo che il posto π' della h nella serie g sarà dispari o pari, ed il $+$ o il $-$ nel termine generale secondo che il posto π della base p sarà dispari o pari, e nell' ultimo termine il $+$ o il $-$ secondo che n sarà dispari o pari. Finalmente dalla (β) del § 72 coll' inversione dei suoi gruppi o dalla (i) cambiando la serie arbitraria g degl' indici in $\gamma - h$ e l' estremo indice z in ζ, indi riponendo g in luogo di $\gamma - \zeta$, si avrà

$$D(g)^{\gamma-h} = \left\{ \begin{array}{l} D(g-z)^{g-h}(z)^{\zeta} - D(g-y)^{g-h}(y)^{\zeta} + \cdots \\ \cdots \pm D(g-p)^{g-h}(p)^{\zeta} \cdots \pm D(g-a)^{g-h}(a)^{\zeta} \end{array} \right\} \quad (\beta')$$

ove parimente avrà luogo il $+$ o il $-$ nel termine generico secondo che il posto π della base p nella serie g sarà dispari o pari, e nell' ultimo secondo che dispari o pari sarà il numero n.

74. Siccome pei §§ 51, 56 un'alternante qualunque diventa zero quando si fanno fra loro eguali due basi qualunque o due indici qualunque, così supposto nella (b) del § 69 che la z divenga eguale ad una qualunque base, per es. $z = k$ e nella (b') del § 71 che si ponga la base $h = k$, si avrà

$$D(g-z)^{g-z}(k)^z - D(g-z)^{g-y}(k)^y + \cdots \pm D(g-z)^{g-p}(k)^p \cdots \pm D(g-z)^{g-a}(k)^a = 0 \qquad (c)$$

$$D(g-h)^{g-z}(k)^z - D(g-h)^{g-y}(k)^y + \cdots \pm D(g-h)^{g-p}(k)^p \cdots \pm D(g-h)^{g-a}(k)^a = 0 \qquad (c')$$

Parimente supposto nella (i) ed (i') del § 73 l'indice $z = k$ e l'indice $h = k$, si avranno le due

$$D(g-z)^{g-z}(z)^k - D(g-y)^{g-z}(y)^k \cdots \pm D(g-p)^{g-z}(p)^k \cdots \pm D(g-a)^{g-z}(a)^k = 0 \qquad (j)$$

$$D(g-z)^{g-h}(z)^k - D(g-y)^{g-h}(y)^k \cdots \pm D(g-p)^{g-h}(p)^k \cdots \pm D(g-a)^{g-h}(a)^k = 0 \qquad (j')$$

che sono le invertite delle (c), (c').

75. Abbiansi le due serie una di lettere, l'altra di numeri espresse da

$$a \quad b \quad c \quad d \ldots\ldots h \ldots\ldots p \ldots\ldots x \quad y \quad z \quad = g$$

$$n,\ n-1,\ n-2,\ n-3 \ldots\ldots \omega \ldots\ldots \varpi \ldots\ldots (3),\ (2),\ (1) \quad = \lambda$$

Se alla serie g si sostituisca la serie λ, ove ogni lettera della g viene rimpiazzata dal numero del posto ch'essa occupa contato da destra a sinistra, le formole (b), (b') date indietro saranno comprese nell'unica formola compendiosa

$$D(\lambda)^\lambda = \sum_{\varpi=1}^{\varpi=n} (-1)^{\omega+\varpi} D(\lambda-\omega)^{\lambda-\varpi} (\omega)^\varpi \qquad (B)$$

e le formole (i), (i') nella

$$D(\lambda)^\lambda = \sum_{\varpi=1}^{\varpi=n} (-1)^{\omega+\varpi} D(\lambda-\varpi)^{\lambda-\omega} (\varpi)^\omega \qquad (I)$$

che è l'invertita della (B).

Parimente essendo date le due serie

$$a \quad b \quad c \ldots . h \ldots . p \ldots . x \quad y \quad z \quad \zeta \qquad = \gamma$$

$$n, \; n-1, \; n-2 \ldots . \omega \ldots . \varpi \ldots . (3), (2), (1), (0) \qquad = \delta$$

ove la δ è l'aggregato della serie λ e del simbolo (0), se ai termini della γ del § 72 si sostituiscono rispettivamente i termini della δ, le formole (β), (β') divengono espresse compendiosamente dalle

$$D(\delta - \omega)^{\lambda} = \sum_{\varpi=1}^{\varpi=n} (-1)^{\varpi+1} D(\lambda - \omega)^{\lambda-\varpi} (0)^{\varpi} \qquad (B')$$

$$D(\lambda)^{\delta-\omega} = \sum_{\varpi=1}^{\varpi=n} (-1)^{\varpi+1} D(\lambda - \varpi)^{\lambda-\omega} (\varpi)^{0} \qquad (I').$$

Per lo stesso modo supposto che la base ω diventi eguale ad un'altra base qualunque θ della serie λ, il 2.° membro della (B) ove l'elemento $(\omega)^{\varpi}$ venga rimpiazzato da $(\theta)^{\varpi}$, diverrà zero, e le due equazioni (c), (c') ove la k sarà rappresentata da θ, saranno compendiosamente rimpiazzate da quest'unica

$$\sum_{\varpi=1}^{\varpi=n} (-1)^{\varpi} D(\lambda - \omega)^{\lambda-\varpi} (\theta)^{\varpi} = 0 \qquad (C).$$

Anche le (j), (j') si compendiano nell'unica formola

$$\sum_{\varpi=1}^{\varpi=n} (-1)^{\varpi} D(\lambda - \varpi)^{\lambda-\omega} (\varpi)^{\theta} = 0 \qquad (D)$$

la quale si deriva dal 2.° membro della (I) quando all'elemento $(\varpi)^{\omega}$ si sostituisca $(\varpi)^{\theta}$.

76. Quando una funzione proposta $F(a, b, c \ldots . x, y, z)$ rappresentata dal gruppo fondamentale simbolico

$$(a)^{a} (b)^{b} \ldots . (y)^{y} (z)^{z} = (g)^{g}$$

è di tal forma che nello sviluppo della $D(g)^g$ scompajono gli elementi affetti dalla stessa base generica h, il risultato è una funzione alternata fra le $g-h$ restanti basi. Di fatto il 2.° membro della formola (b') del § 71 si riduce in tal caso a

$$\pm\left\{D(g-h)^{g-z}-D(g-h)^{g-y}+D(g-h)^{g-x}-\ldots\pm D(g-h)^{g-p}\ldots\right\}.$$

I diversi termini essendo alternanti rispetto ad $n-1$ basi comunque affette da diverse serie d'indici, un'alternazione fra due basi qualunque della $g-h$ ridurrà i termini stessi eguali e di segno contrario, ed il risultato sarà eguale e di segno contrario al precedente.

77. Si presenta il caso del precedente paragrafo quando la funzion proposta fosse per modo d'esempio un prodotto della forma $\phi_1(a)\,\phi_2(b)\,\phi_3(c)\ldots\phi_n(z)$, e che inoltre le diverse funzioni ϕ fossero tali che per una determinata base h si avesse $\phi_1(h)=\phi_2(h)=\phi_3(h)\ldots=\phi_n(h)=C$, essendo C una costante. La $D(g)^g$ data dalla (b') si ridurrebbe in questo caso a

$$\pm C\left\{D(g-h)^{g-z}-D(g-h)^{g-y}\ldots\pm D(g-h)^{g-p}\ldots\right\},$$

la quale sarebbe una funzione alternata rispetto a tutte le $g-h$ restanti basi.

78. Quando la funzione proposta di cui $(g)^g$ è la rappresentazione simbolica si riduce a tale forma che nello sviluppo della $D(g)^g$ scompajono gli elementi affetti da uno stesso indice generico h, il risultato è una funzione alternata delle n basi $a, b, c\ldots x, y, z$. Di fatto se nel 2.° membro della (i') del § 73 si alternano fra loro due basi qualunque k, p, tutte le alternanti $D(g-z)^{g-k}$, $D(g-y)^{g-k}\ldots$ che contengono nei loro gruppi le due basi k, p diverranno eguali e di segno contrario. Si chiamino K, P ciò che divengono le alternanti $\pm D(g-k)^{g-k}$, $\pm D(g-p)^{g-k}$.

Dopo eseguita l'alternazione la (i') si cambierà in

$$-D(g)^g = \pm \left\{ \begin{array}{l} -D(g-z)^{g-h}(z)^h + D(g-y)^{g-h}(y)^h \cdots \\ \cdots + K(p)^h \cdots + P(k)^h \cdots \mp D(g-a)^{g-h}(a)^h \end{array} \right\} \quad (a)$$

Sommata questa colla (i'), avuto riguardo ai termini che scompajono, si otterrà

$$0 = K(p)^h + P(k)^h \pm D(g-k)^{g-h}(k)^h \pm D(g-p)^{g-h}(p)^h$$

ossia

$$\left(K \pm D(g-p)^{g-h}\right)(p)^h + \left(P \pm D(g-k)^{g-h}\right)(k)^h = 0.$$

Questa dovrà avverarsi indipendentemente dagli elementi $(p)^h$, $(k)^h$, sarà perciò

$$K = \mp D(g-p)^{g-h}, \quad P = \mp D(g-k)^{g-h}.$$

Il 2.° membro della (a) diverrà perciò

$$\mp \left\{ \begin{array}{l} D(g-z)^{g-h}(z)^h - D(g-y)^{g-h}(y)^h + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots \pm D(g-p)^{g-h}(p)^h \cdots \pm D(g-k)^{g-h}(k)^h \cdots \pm D(g-a)^{g-h}(a)^h \end{array} \right\}.$$

Ma il 2.° membro della (i') quando scompajono gli elementi affetti dallo stesso indice h, si riduce a

$$\pm \left\{ \begin{array}{l} D(g-z)^{g-h} - D(g-y)^{g-h} + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots \pm D(g-k)^{g-h} \cdots \pm D(g-p)^{g-h} \cdots \pm D(g-a)^{g-h} \end{array} \right\} \quad (b)$$

e la precedente in cui si è eseguita l'alternazione fra k, p alla

$$\mp \left\{ \begin{array}{l} D(g-z)^{g-h} - D(g-y)^{g-h} + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots \pm D(g-p)^{g-h} \cdots \pm D(g-k)^{g-h} \cdots \pm D(g-a)^{g-h} \end{array} \right\}.$$

Stante che il posto dell'indice h è lo stesso, dovrà in entrambe valere o il segno superiore, o il segno inferiore. Essendo

questa eguale e di segno contrario alla (b), sarà la stessa (b) una funzione alternata.

79. Il caso del precedente paragrafo si presenta quando la proposta funzione fosse per es. della forma $f(a, b, c \cdots x, y)\,\phi(z)$ ove la funzione ϕ fosse tale da verificare la condizione $\phi(a) = \phi(b) = \cdots = \phi(z) = C$ essendo C una costante. In fatti il 2.° membro della (i') diventa in questo caso

$$\pm C\left\{D(g-z)^{g-h} - D(g-y)^{g-h} + \cdots \pm D(g-p)^{g-h} \cdots \pm D(g-a)^{g-h}\right\}$$

e questa pel paragrafo antecedente sarà una funzione alternata rispetto alle n basi $a, b, c \cdots y, z$.

80. Il risultato del § 78 essendo l'invertito di quello del § 76 e viceversa, ne risulta che se la funzion proposta è tale che nello sviluppo dell'alternante simbolica $D(g)^g$ si avveri la disparizione o degli elementi affetti da una stessa base o di quelli affetti dallo stesso indice, lo sviluppo stesso è una funzione alternata, sia rispetto alle basi, sia rispetto agli indici che esso contiene. Una funzione alternata di tal specie si chiamerà in ambi i casi *alternante incompleta*.

81. Quando la funzione $F(a, b, c \cdots x, y, z)$ rappresentata dal gruppo simbolico $(g)^g$ è tale che nello sviluppo della $D(g)^g$ scompajono gli elementi affetti dallo stesso indice generico h, e quelli affetti da altro indice diverso k, scompajono cioè gli elementi compresi nelle due serie

$$\left.\begin{array}{l} (z)^h,\ (y)^h,\ (x)^h \cdots (p)^h \cdots (t)^h \cdots (b)^h,\ (a)^h \\ (z)^k,\ (y)^k,\ (x)^k \cdots (p)^k \cdots (t)^k \cdots (b)^k,\ (a)^k \end{array}\right\} \qquad (a)$$

l'alternante della funzion proposta ossia la $D(g)^g$ si ridurrà a zero. Di fatto s'immagini lo sviluppo della $D(g)^g$ ordinato a seconda di tutte le coppie di elementi che nascono dai termini $(p)^h(t)^k$, $(p)^k(t)^h$ quando si sostituiscano alle basi p, t tutte le $\frac{n(n-1)}{2}$ combinazioni a due a due delle n

basi date. Raccolti tutti i termini affetti da una stessa $(p)^h(t)^k$ o $(p)^k(t)^h$, un tale sviluppo sarà della forma

$$D(g)^g = \left\{ \begin{array}{l} A(z)^h(y)^k + B(z)^h(x)^k + \cdots + F(y)^h(x)^k + G(y)^h(v)^k + \cdots + H(p)^h(t)^k + \cdots \\ A'(z)^k(y)^h + B'(z)^k(x)^h + \cdots + F'(y)^k(x)^h + G'(y)^k(v)^h + \cdots + H'(p)^k(t)^h + \cdots \end{array} \right\} \quad (b)$$

ove si deve intendere che a ciascuno de' gruppi contenuti per es. in H deve unirsi la parte $(p)^h(t)^k$ non in via di prodotto, ma per semplice aggregazione. Nei diversi gruppi contenuti nelle serie

$$A,\ B \cdots F,\ G \cdots H \cdots;\ A',\ B' \cdots F',\ G' \cdots H' \cdots$$

mancheranno gli elementi affetti dagl' indici h, k. Si eseguisca nella (b) l'alternazione fra i due indici h, k, ed il risultato si sommi colla stessa (b), osservando che in tal caso la $D(g)^g$ si cambia in $-D(g)^g$, si otterrà l'equazione

$$o = \left\{ \begin{array}{l} (A+A')(z)^h(y)^k + (B+B')(z)^h(x)^k + \cdots + (F+F')(y)^h(x)^k + \cdots + (H+H')(p)^h(t)^k + \cdots \\ (A'+A)(z)^k(y)^h + (B'+B)(z)^k(x)^h + \cdots + (F'+F)(y)^k(x)^h + \cdots + (H'+H)(p)^k(t)^h + \cdots \end{array} \right\}$$

Questa equazione non potrà sussistere, a meno che non siano separatamente zero tutti i binomj che affettano le diverse coppie $(p)^h(t)^k$, $(p)^k(t)^h$, onde si avrà

$$A' = -A,\ B' = -B \cdots F' = -F \cdots H' = -H \cdots$$

e la (b) diverrà così espressa da

$$D(g)^g = \left\{ \begin{array}{l} +A(z)^h(y)^k + B(z)^h(x)^k + \cdots + F(y)^h(x)^k + \cdots + H(p)^h(t)^k + \cdots \\ -A(z)^k(y)^h - B(z)^k(x)^h - \cdots - F(y)^k(x)^h - \cdots - H(p)^k(t)^h - \cdots \end{array} \right\}$$

Nell'ipotesi pertanto in cui tutti gli elementi dati dalle serie (a) scompajono dallo sviluppo della $D(g)^g$, ridotte all'unità le diverse coppie di cui le generiche sono $(p)^h(t)^k$, $(p)^k(t)^h$ si avrà $D(g)^g = o$.

Si arriva egualmente all'enunciata conclusione quando si rifletta che il risultato a cui si giunge nell'ipotesi in cui nello sviluppo della $D(g)^g$ scompajono tutti gli elementi della serie (a) è lo stesso, astrazion fatta dal segno, di quello a cui si giungerebbe quando si supponesse il gruppo $(g)^g$ della forma

$$(g)^{(g-h-k)\,h\,k} = (a^a (b)^b (c)^c \ldots . (x)^x y^h z^k$$

ove $y^h z^k$ è il prodotto di due potenze h, k delle basi y, z, e che, a sviluppo eseguito, si supponessero zero gli esponenti h, k. La scomparsa di tali elementi accaderebbe qui nel ridursi le generiche $p^h t^k$, $p^k t^h$ eguali all'unità. Ma il supporre $h = k = 0$ è quanto supporre che nella $D(g)^g$ due indici qualunque h, k divengano eguali fra loro. Dunque pel § 56 il risultato dev'essere zero.

82. Il caso del precedente paragrafo si presenta in particolare quando la proposta funzione $F(a, b, c \ldots . x, y, z)$ fosse per esempio della forma $f(a, b, c \ldots . x)\,\phi(y)\,\psi(z)$ ove le ϕ, ψ fossero tali funzioni da verificare le condizioni

$$\phi(a) = \phi(b) = \phi(c) = \ldots . = \phi(z) = C$$

$$\psi(a) = \psi(b) = \psi(c) = \ldots . = \psi(z) = C'$$

essendo C, C' due costanti. In questa ipotesi in fatti il risultato dello sviluppo della

$$D(g)^g = D\left\{(a)^a (b)^b (c)^c \ldots . (x)^x y^y z^z\right\}$$

si ridurrebbe a quello stesso che si ottiene dallo sviluppo della

$$C\,C'\,D\left\{(a)^a (b)^b (c)^c \ldots . (x)^x y^y z^z\right\}$$

ove gli esponenti y, z che qui tengon luogo di h, k del precedente paragrafo si riducano a zero.

83. Quando la funzione $F(a, b, c \ldots . x, y, z)$ è tale che nello sviluppo della $D(g)^g$ scompajono tutti gli elementi affetti da due basi h, k, ossia tutti gli elementi

compresi nelle due serie

$$(h)^z\,,\quad (h)^y\,,\quad (h)^x \ldots . (h)^p \ldots . (h)^t \ldots . (h)^b\,,\quad (h)^a$$

$$(k)^z\,,\quad (k)^y\,,\quad (k)^x \ldots . (k)^p \ldots . (k)^t \ldots . (k)^b\,,\quad (k)^a$$

l'alternante della funzione proposta ossia la $D(g)^s$ si ridurrà a zero. S'immagini in fatti ordinato lo sviluppo di $D(g)^s$ a seconda de' gruppi parziali che nascono dalle generiche $(h)^p(k)^t$, $(k)^p(h)^t$ quando si sostituiscano alla coppia p, t d'indici tutte le $\frac{n(n-1)}{2}$ coppie che nascono dal combinare a due a due gli n indici della serie g come nel § 81 si è detto rispetto alle n basi. Lo sviluppo di $D(g)^s$ verrà allora rappresentato dal 2.° membro della (b) del citato paragrafo quando s'invertano i diversi gruppi di cui è composto e si rimpiazzino le

$$A\,,\ B\,,\ C \ldots . F \ldots . H\,;\quad A'\,,\ B'\,,\ C' \ldots . F' \ldots . H'$$

con un indice in basso. Seguendo allora lo stesso processo ivi indicato, avvertendo solo che nel 2.° modo di dimostrazione si dovranno ridurre all'unità le basi h, k, si giungerà alla enunciata conclusione.

84. Il caso del precedente paragrafo si presenta in particolare quando la $F(a\,,\ b \ldots . x\,,\ y\,,\ z)$ sia della forma

$$\phi_1(a)\,\phi_2(b)\,\phi_3(c) \ldots . \phi_{n-1}(y)\,\phi_n(z)$$

ove le diverse funzioni ϕ verifichino le condizioni

$$\phi_{n-1}(a) = \phi_{n-1}(b) = \phi_{n-1}(c) \cdots . = \phi_{n-1}(z) = C$$

$$\phi_n(a) = \phi_n(b) = \phi_n(c) \cdots . = \phi_n(z) = C'$$

essendo C, C' due costanti. In questa ipotesi in fatti il risultato dello sviluppo di $D(g)^s$ si riduce a quello stesso che si ottiene dallo sviluppo della

$$C\,C'\,D\left\{(a)^a\,(b)^b\,(c)^c \ldots . (x)^x\,y^y\,z^z\right\}$$

quando le basi y, z, che quì tengon luogo delle h, k del precedente paragrafo, si riducano all'unità.

85. Quando la funzion proposta rappresentata pel gruppo simbolico $(g)^s$ sia tale che tutti gli elementi affetti dalla stessa base generica h, ovvero tutti gli elementi affetti dallo stesso indice generico h sono zero, l'alternante $D(g)^s$ si riduce a zero. L'equazione (b') del § 71 rende manifesta la prima proposizione, e l'equazione (i') del § 73 rende evidente la seconda. Potrà servire d'esempio pel primo caso la forma a cui fu ridotta la proposta funzione nel § 77, col supporvi $C = 0$, servirà d'esempio pel secondo caso la forma a cui si è ridotta la proposta funzione nel § 79 col supporvi ridotta a zero la costante C.

86. Si esprima con E la serie di tutti gli elementi che nascono dall'elemento generico $(\dot{h})^p$ col sostituire ad h e p in tutti i modi possibili le n lettere della serie g. Potrà la E ridursi alla forma $E = (\phi, \lambda, \lambda')$, ove la ϕ rappresenti la serie di tutti gli n elementi fissi, λ una serie qualunque di $\frac{n(n-1)}{2}$ elementi soggetta solo alla condizione di non contenere alcuna coppia di elementi di cui uno sia l'invertito dell'altro, e λ' una serie degli $\frac{n(n-1)}{2}$ elementi restanti che saranno gl'invertiti di quelli di λ.

Siccome la E deve contenere tutti gli elementi che in tutti i modi possibili possono derivarsi dal generico $(h)^p$ colle successive sostituzioni delle lettere della g, se alla E si leva il numero $= n$ di elementi fissi, i residui elementi saranno in numero $= n^2 - n = n(n-1)$, e perciò in numero pari. Scelta fra questi una serie qualsivoglia λ di $\frac{n(n-1)}{2}$ elementi colla condizione che nessuno di essi compaja l'invertito di un altro, si proverà con un ragionamento analogo a quello usato nel § 33, ove si è mostrato essere la V

della forma (I, I'), che quì parimente i restanti $\frac{n(n-1)}{2}$ elementi non possono essere che gl' invertiti di quelli della serie λ.

87. Tutti i gruppi di cui constano le serie I, I' del § 33 saranno composti di un numero ε di elementi appartenenti alla serie λ e di un numero $n-\varepsilon$ di quelli appartenenti a λ', o viceversa, potendo ε avere tutti i valori da o ad n, colla condizione però che nessuna delle basi e nessuno degl' indici vi compaja ripetuto. Siccome tutti i gruppi della I' sono gl' invertiti di quelli della I, ne deriva che a ciascun gruppo della I fatto di un numero ε di elementi appartenenti a λ e di un numero $n-\varepsilon$ di quelli appartenenti alla λ' o viceversa corrisponderà nella I' un gruppo fatto di $n-\varepsilon$ elementi della serie λ e di ε elementi della λ' o viceversa.

88. Quando a tutti i gruppi delle serie T, V, V', I, I' dei §§ 32 e 33 s' intenda applicato il segno $+$, verranno esse contraddistinte colla lettera s posta al loro piede, quando a ciascun gruppo delle anzidette serie sarà applicato il segno $+$ o il $-$ a seconda della regola del § 48, verranno esse indicate colla d al piede. Siccome la R_n si cambia nel 1.° caso in $S(n)$ e nel 2.° in $D(n)$, così si avrà dai citati paragrafi essendo $V_s = I_s + I'_s$

$$S(n) = T_s + V_s + V'_s \quad \text{ovvero} \quad S(n) = T_s + V_s$$

secondo che n sarà pari o dispari

e parimente essendo $V_d = I_d + I'_d$

$$D(n) = T_d + V_d + V'_d \quad \text{ovvero} \quad D(n) = T_d + V_d$$

secondo che n sarà pari o dispari. Nelle quali formole T_s, T_d conterranno gruppi, in ciascun de' quali entrerà per lo meno un elemento fisso o rientrante di 1.° specie; V'_s, V'_d

conterranno gruppi fatti soltanto di rientranti di 2.ª specie; I_s ed I'_s od I_d ed I'_d conterranno i restanti gruppi, ma distribuiti in modo che i gruppi di I'_s saranno gl'invertiti di I_s, ed i gruppi della I'_d gl'invertiti di quelli della I_d ed affetti rispettivamente dagli stessi segni.

89. Nel caso di n pari la $D(g)^g = D(n)$ sarà espressa da $D(g)^g = T_d + V_d \pm V'_s$, ove avrà luogo il $+$ o il $-$ secondo che n sarà un numero paro-pari od un numero paro-dispari. Di fatti la V' constando di gruppi fatti soltanto di rientranti di 2.ª specie, il numero m di rientranti di ciascun gruppo della V' sarà eguale ad $\frac{n}{2}$. Dunque i gruppi della V'_d saranno tutti affetti dal segno $+$ o dal segno $-$ secondo che $n - m = \frac{n}{2}$ sarà pari o dispari § 48, sarà dunque $V'_d = \pm V'_s$, valendo il $+$ o il $-$ secondo che $\frac{n}{2}$ sarà pari o dispari, val quanto dire secondo che n sarà un numero paro-pari o paro-dispari.

90. Sia la funzione proposta come nel § 84 della forma

$$\phi_1(a)\,\phi_2(b)\,\phi_3(c)\,\ldots\,\phi_n(z) = (a)^a\,(b)^b\,(c)^c\,\ldots\,(z)^z = (g)^g,$$

le diverse ϕ di questo prodotto essendo funzioni qualunque. Se fra gli elementi della serie E si stabiliscono le relazioni che nascono dalle espressioni generiche

$$(a) \qquad (p)^p = 0, \qquad\qquad (p)^h = -(h)^p \qquad (b)$$

quando alle basi ed indici p, h si sostituiscono le differenti lettere della serie g, sarà $D(g)^g = 0$ quando n sia numero dispari. Di fatti in forza della condizione (a) sarà $T_d = 0$ e si avrà dal § 88 $D(g)^g = I_d + I'_d$. La serie E del § 86 sarà ridotta a $E = (\lambda, \lambda')$ per essere $\phi = 0$, ove i gruppi di λ' saranno eguali e di segno contrario ai gruppi della serie λ in forza della (b). Si consideri un

gruppo qualunque G della serie I_d. Esso sarà della forma $(-1)^{n-m} HK$, ove intendiamo per H il complesso di tutti quegli elementi che trovansi in G in numero $= \varepsilon$ che appartengono alla serie λ, e per K il complesso dei restanti $n-\varepsilon$ elementi che apparterranno alla serie λ'. Il gruppo G_1 invertito del gruppo G che si troverà nella serie I'_d avendo lo stesso numero m di rientranti § 12, sarà espresso da $(-1)^{n-m} H_1 K_1$, ove pel § 87 la H_1 conterrà un numero $= \varepsilon$ di elementi appartenenti alla serie λ' e K_1 un numero $= n-\varepsilon$ di elementi appartenenti alla serie λ. Si sostituiscano nel gruppo $G = (-1)^{n-m} HK$ agli $n-\varepsilon$ elementi della K i loro invertiti che saranno eguali e di segno contrario in forza della (b). Il gruppo G diverrà $(-1)^{n-m} H(-1)^{n-\varepsilon} K_1$, ove gli ε elementi di H e gli $n-\varepsilon$ elementi di K_1 apparterranno ora alla stessa serie λ. Si sostituisca nel gruppo $G_1 = (-1)^{n-m} H_1 K_1$ della serie I'_d a tutti gli ε elementi della H_1 che appartengono alla serie λ' i loro eguali e contrarj invertiti appartenenti alla λ. La H_1 si cambierà in $(-1)^{\varepsilon} H$ ed il gruppo G_1 diverrà $(-1)^{n-m}(-1)^{\varepsilon} HK_1$, sarà perciò

$$G + G_1 = (-1)^{n-m} HK_1\left((-1)^{\varepsilon} + (-1)^{n-\varepsilon}\right).$$

Ma per essere n dispari, l'uno dei due numeri ε, $n-\varepsilon$, sarà pari e l'altro dispari, onde risulta $G + G_1 = 0$. Siccome a ciascun gruppo di I'_d corrisponde un gruppo invertito della I_d, così ripetuto lo stesso discorso su ciascuna coppia di gruppi invertiti, l'uno della I_d e l'altro della I'_d, si avrà $I_d + I'_d = 0$ e perciò $D(g)^g = 0$.

91. Nelle stesse condizioni del § 90, ma nell'ipotesi di n pari, sarà $D(g)^g = 2\Pi \pm \Omega$, valendo il $+$ o il $-$ secondo che n sarà paro-pari o paro-dispari, essendo Π ciò che diventa la I'_d quando in ciascun gruppo di cui

consta si sostituiscano agli ε elementi della serie λ' i loro eguali e di segno contrario della serie λ ed essendo $\Omega = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + \cdots + g_\mu^2$ ove $g_1, g_2, g_3 \cdots g_\mu$ sono i μ gruppi della V'_1, omessi in ciascuno gli $\frac{n}{2}$ elementi invertiti appartenenti a λ' che ciascun gruppo contiene. Di fatto nel caso di n pari si ha $T_d = 0$ per la condizione (a) del § 90 ed in forza dei §§ 88 e 89 risulterà

$$D(g)^s = D(n) = V_d \pm V'_1 = I_d + I'_d \pm V'_1 .$$

Dalla dimostrazione del paragrafo precedente risulta che $G + G_1$ sarà eguale a $(-1)^{n-m+\varepsilon} 2HK_1$, ossia eguale a due volte ciò che diventa il gruppo G_1 della I'_d quando agli ε elementi della λ' che contiene si sostituiscano i loro eguali e di segno contrario della serie λ. Perciò chiamato Π ciò che diventa la I'_d con tali sostituzioni in tutti i suoi gruppi, sarà $I_d + I'_d = 2\Pi$. Osservando poi che V'_1 fatto di un numero μ di gruppi consta soltanto di rientranti di 2.ª specie, si vede che ciascun suo gruppo conterrà un numero $\frac{n}{2}$ di elementi della serie λ ed un numero $\frac{n}{2}$ di elementi invertiti della λ'. Fatta perciò la sostituzione in questi ultimi dei loro eguali e contrarj della serie λ, ciascun gruppo diverrà un quadrato, ed avuto riguardo al § 89, la V'_1 si cambierà in Ω. Giova osservare che la μ sarà il prodotto di tutti i numeri dispari contenuti nel numero n.

92. Se si suppone che la serie delle basi $a, b, c \ldots x, y, z$ sia indicata inversamente colla serie

$$Z, Y, X \ldots C, B, A = G',$$

se abbiansi cioè le eguaglianze fra i rispettivi termini delle

due serie

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a & b & c \ldots & h \ldots & x & y & z \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z & Y & X \ldots & R \ldots & C & B & A \end{array}\right\} \qquad (P)$$

posti nella stessa linea verticale, e si stabiliscano tutte le relazioni che nascono dalle generiche

$$(P)^p = 0\,, \qquad (A)\,; \qquad\qquad (P)^h = -(H)^p\,, \qquad (B)$$

quando agl' indici p, h si sostituiscano tutte le lettere della serie g ed alle basi P, H tutte quelle della G', e che indi si rimpiazzino le lettere grandi colle lettere piccole che loro corrispondono nella (P), la $D(g)^g$ sarà zero nel solo caso di n dispari. Di fatto in forza dell' eguaglianza stabilita fra le basi della serie g e quelle della G' si avrà $D(g)^g = D(G')^g$. Se si chiama G il gruppo $(ABC \ldots . XYZ)^g$, si avrà pel § 54 $D(G')^g = \pm D(G)^g$, valendo il $+$ o il $-$ secondo che il numero d'alternazioni per passare da $(G')^g$ a $(G)^g$ sarà pari o dispari, ossia secondo che $n-m$ sarà pari o dispari, essendo m il numero de' rientranti del gruppo $(G')^g$. Ma per essere n dispari il gruppo $(G')^g$ consta di un numero $\frac{n-1}{2}$ di rientranti di 2.ª specie e di un solo rientrante di 1.ª, sarà dunque $m = \frac{n-1}{2} + 1$, perciò $n - m = \frac{n-1}{2}$. Risultando pari la differenza $n-m$, sarà $D(g)^g = D(G)^g$. Ma pel § 86 la $D(G)^g$ si annulla se siano verificate le relazioni che nascono dalle generiche (A), (B) quando gl' indici p, h ricevano tutte le lettere della serie g e le basi P, H tutte quelle della serie G, dunque anche $D(g)^g$ sarà zero quando siano verificate tutte le equazioni comprese nelle (A), (B) dopo aver sostituito alle lettere grandi le lettere piccole che immediatamente loro

corrispondono sulle linee verticali della (P). Un discorso analogo a quello del § 91 persuade che quando la n è pari, i gruppi della $D(G)^g$ non potendo distruggersi colle sole condizioni (A), (B), nemmeno la $D(g)^g$ potrà ridursi a zero.

93. Le proposizioni dei §§ 90, 91 e 92 vengono compendiate quando alla serie delle lettere si sostituisca la serie dei numeri indicata al § 75, quando cioè si sostituisca alla serie

$$a, \quad b, \quad c \ldots\ldots h \ldots\ldots p \ldots\ldots x \quad y \quad z$$

la $$n, \quad n-1, \quad n-2 \ldots\ldots \omega \ldots\ldots \theta \ldots\ldots (3) \quad (2) \quad (1)$$

ove ω, θ sono due numeri qualunque della serie numerica che indicheremo ancora con g. Se sarà n numero dispari, la $D(g)^g$ sarà zero quando siano verificate tutte le relazioni che nascono tanto dalle generiche

$$(\omega)^\omega = 0, \qquad (\omega)^\theta = -(\theta)^\omega$$

quanto dalle

$$(n+1-\omega)^\omega = 0, \qquad (n+1-\omega)^\theta = -(n+1-\theta)^\omega$$

col dare ad ω, θ tutti i numeri della serie g. Se le dette condizioni sono verificate, ma la n è numero pari, allora la $D(g)^g$ cesserà di ridursi a zero.

94. Se si limita ulteriormente la generalità col supporre che le funzioni $\phi_1\ \phi_2 \ldots\ldots \phi_n$ indichino diverse potenze della base rispettiva ch' esse contengono, allora gl' indici $(a)\,(b) \ldots\ldots (z)$ della $D\left\{a^{(a)}\, b^{(b)} \ldots\ldots z^{(z)}\right\}$ data al § 38 diverranno altrettanti esponenti che indicheremo con a', b', $c' \ldots\ldots z'$ onde distinguerli dalle basi a, b, $c \ldots\ldots z$ dalle quali sono essi affatto indipendenti. Si avrà così

$$D(n) = D\left\{(a)^a (b)^b \ldots (z)^z\right\} = D\left\{a^{a'} b^{b'} c^{c'} \ldots z^{z'}\right\} = D\left\{a\, b\, c \ldots y\, z\right\}^g$$

ove la g indica la serie degli esponenti a', b' .... z'. Supponiamo inoltre $a' = 0$, $b' = 1$, $c' = 2$ .... $z' = n-1$, sarà $D(n) = D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots z^{n-1}\right\}$ e questa sarà un caso particolare della $D\left\{\phi_1(a)\,\phi_2(b) \ldots \phi_n(z)\right\}$ in cui siasi fatto $\phi_1(a) = a^0$ $\phi_2(b) = b^1$ $\phi_3(c) = c^2 \ldots \phi_n(z) = z^{n-1}$. Perciò la $D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots z^{n-1}\right\}$, ridotti all'unità tutti gli elementi affetti da esponente zero che compajono nello sviluppo, sarà un'alternante incompleta e particolare che rappresenteremo con $D_i(n)$.

95. La $D_i(n)$ è una funzione interá di grado $n-1$ rispetto a ciascuna delle n basi $a, b, c \ldots z$. Inoltre essendo una funzione alternata, diverrà zero col supporre una qualunque delle basi eguale ad un'altra. Considerata come una funzione intera di grado $n-1$ rispetto ad a, diverrà zero per $a = b$, $= c$, $= d \ldots = z$, sarà dunque divisibile per ciascuna delle differenze

$$b-a, \quad c-a, \quad d-a, \qquad y-a, \quad z-a$$

e perciò divisibile pel loro prodotto. Sarà dunque $D_i(n)$ della forma

$$(a) \qquad D_i(n) = P'(b-a)(c-a)(d-a) \ldots (y-a)(z-a).$$

Ma la $D_i(n)$ considerata come funzione intera rispetto alla b si annulla per $b = c$, $= d$, $= e \ldots = y$, $= z$, sarà perciò essa divisibile anche pel prodotto delle differenze

$$c-b, \quad d-b, \quad e-b \ldots y-b, \quad z-b.$$

Ma il fattore di P' nel 2.° membro della (a) non essendo divisibile per dette differenze, lo dovrà essere P', onde sarà P' della forma

$$P' = P''(c-b)(d-b)(e-b) \ldots (y-b)(z-b),$$

colla stessa induzione si otterranno le

$$P'' = P'''(d-c)(e-c)\ldots\ldots(y-c)(z-c)$$

$$P''' = P^{IV}(e-d)(f-d)\ldots\ldots(y-d)(z-d)$$

$$P^{IV} = P^{V}(f-e)\ldots\ldots\ldots\ldots(y-e)(z-e)$$

$$\vdots$$

$$P^{(n-2)} = P^{(n-1)}(y-x)(z-x)$$

$$P^{(n-1)} = P^{(n)}(z-y).$$

Colla sostituzione successiva e col disporre le differenze a seconda delle basi ordinate si avrà

$$D_i(n) = P^{(n)}(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)\ldots\ldots(z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-y) \qquad (b)$$

Se s'immagina eseguito il prodotto indicato nel 2.° membro si riconosce subito che il grado massimo rispetto a ciascuna delle n basi sarà $= n-1$, cioè eguale al grado massimo della $D_i(n)$, dunque $P^{(n)}$ non potendo contenere alcuna delle n basi sarà indipendente da esse, e perciò costante. Ma stante che una tale costante indipendente dalle basi manca nella $D_i(n)$, ne deriva $P^{(n)} = 1$. Se in luogo di supporre $\phi_1(a) = a^0$ si fosse supposto $\phi_1(a) = k\,a^0$, sarebbe risultato $P^{(n)} = k$. Supposto che il 2.° membro della (b) ove facciasi $P^{(n)} = 1$ sia rappresentato da P, il risultato che si otterrebbe dall'eseguire tutti i prodotti indicati nella P si otterrà con maggiore speditezza sviluppando la $D\{(a)^a(b)^b\ldots\ldots(z)^z\}$, colla regola data al § 70 levando nel risultato le parentesi, sostituendo alla serie degli indici a, b, $c\ldots\ldots y$, z i corrispondenti esponenti 0, 1, $2\ldots\ldots n-2$, $n-1$ ed omettendo i fattori affetti da esponente zero.

96. Comunque la funzion proposta rappresentata sempre col gruppo fondamentale $(g)^g$ non sia della forma $a^0 b^1 c^2 \ldots y^{n-2} z^{n-1}$ contemplata indietro, ma sibbene una funzione qualunque $f(a, b, c \ldots y, z)$ l'alternante completa $D\{(a)^a (b)^b (c)^c \ldots (y)^y (z)^z\}$ potrà rappresentarsi simbolicamente coll'espressione P del precedente paragrafo, purchè eseguiti i prodotti delle differenze contenute in essa ed omessi i termini che si distruggono, si completi ciascun gruppo che risulterà di $g-h$ basi coll'elemento h^0 e si cambino tutti gli esponenti

$0, 1, 2, 3 \ldots . n-2, n-1$ cogl' indici rispettivi

$a, b, c, d \ldots . y, z$

raccogliendo fra parentesi le basi. Si avrà così

$$D(g)^g = \left\{ \begin{matrix} (b-a)(c-a)(c-b) \ldots . (y-a)(y-b) \ldots . (y-x) \\ (z-a)(z-b)(z-y)(z-d) \ldots \ldots . (z-x)(z-y) \end{matrix} \right\} = \{P\}$$

ove si sono sostituite le parentesi $\{\ldots .\}$ alle $(\ldots .)$ per avvertire che tale espressione del prodotto P è simbolica. L'espressione $\{P\}$ comunque indicata simbolicamente colle basi $a, b, c \ldots . y, z$ non cesserà di godere di tutte le proprietà che competono all'alternante ch'essa rappresenta.

97. Nelle stesse ipotesi del § 94 ritenute le notazioni del § 43 e chiamata g la solita serie delle n basi $a, b, c, d \ldots . x, y, z$; g_1 la serie degli n indici $0, 1, 2, 3 \ldots . n-2, n-1$; μ la serie degli $n+1$ numeri $0, 1, 2, 3 \ldots . n-2, n-1, n$, essendo α un numero qualunque della serie μ, si avrà

$$P_\alpha P_{n-\alpha} D_i(g)^{\mu-(n-\alpha)} = D_i(g)^{g_1} S(1^\alpha, 0^{n-\alpha}), \qquad (R)$$

la quale contiene un numero n di relazioni distinte fra le diverse simetriche incomplete e le alternanti incomplete e

particolari D_i a seconda dei valori di α da zero ad n inclusiva. Di fatto se nella serie (b) del § 69 si cambia la serie g delle n basi in una serie di $n+1$ basi designata da $g\zeta=\gamma$, ed alla serie g degl'indici si sostituisce una serie μ di $n+1$ indici, osservando che in tal caso la D si cambia in D_i e $\gamma-\zeta$ diventa g, si avrà

$$D_i(\gamma)^\mu=\left\{\begin{matrix} D_i(g)^{\mu-n}\zeta^n-D_i(g)^{\mu-(n-1)}\zeta^{n-1}+D_i(g)^{\mu-(n-2)}\zeta^{n-2}-\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\pm D_i(g)^{\mu-(n-\alpha)}\zeta^{n-\alpha}\ldots\ldots\pm D_i(g)^{\mu-0}\zeta^0 \end{matrix}\right\}$$

ove avrà luogo il $+$ o il $-$ nel termine generale secondo che il posto π' dell'indice $n-\alpha$ nella serie μ letta da destra a sinistra sarà dispari o pari; ma per essere $\pi'=\alpha+1$, varrà il $+$ o il $-$ secondo che α sarà pari o dispari. Se il primo membro della data equazione si pone sotto la forma composta del prodotto di tutte le differenze fra le basi della γ dietro il § 95 e si sviluppi l'ultimo fattore

$$(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)\ldots(\zeta-y)(\zeta-z)=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n}\frac{(-1)^\alpha S(1^\alpha,0^{n-\alpha})\zeta^{n-\alpha}}{p_\alpha p_{n-\alpha}}$$

chiamando $1, A_1, A_2, A_3\ldots\ldots A_\alpha\ldots\ldots A_n$ i coefficienti delle decrescenti potenze di ζ, si avrà

$$D_i(\gamma)^\mu=D_i(g)^{\mu-n}\left\{\zeta^n-A_1\zeta^{n-1}+A_2\zeta^{n-2}\ldots\ldots\pm A_\alpha\zeta^{n-\alpha}\ldots\ldots\pm A_n\zeta^0\right\}$$

ove varrà il $+$ o il $-$ nel termine generale secondo che α sarà pari o dispari. Paragonando adunque i coefficienti della stessa potenza $\zeta^{n-\alpha}$ nei due valori di $D_i(\gamma)^\mu$ ed osservando essere $\mu-n=g_1$, si avrà $D_i(g)^{g_1}A_\alpha=D_i(g)^{\mu-(n-\alpha)}$. Ma pel § 43 si ha $A_\alpha=\dfrac{S(1^\alpha,0^{n-\alpha})}{p_\alpha p_{n-\alpha}}$, e perciò sostituendo un tal valore, si avrà la (R).

98. Conservata alle g, g_1 la stessa significazione del paragrafo antecedente, la simetrica complessa del § 45 diventa il quadrato di un'alternante incompleta D_i, e la relativa espressione si cambia nella seguente

$$\left(D_i(g)^{g_1}\right)^2 = S\left(D_i\left\{(\alpha)^\alpha(\beta)^\beta(\gamma)^\gamma\ldots\ldots(\zeta)^\zeta\right\}\right), \qquad (R').$$

In fatti il prodotto dei quadrati di tutte le differenze delle n basi $a, b, c\ldots\ldots x, y, z$ dato al citato paragrafo diventa in forza del § 95 il quadrato dell'alternante incompleta e particolare designata con $D_i(g)^{g_1}$. Parimente avuto riguardo che la 2.ª delle quattro regole del § 45 è la stessa regola per la formazione di un'alternante, dietro il § 48 si vede che la R_n si cambia in D_i. Perciò la formola (R') non è che la traduzione più compendiosa dell'espressione simbolica data in quel paragrafo. Giova osservare che il 1.° membro della (R') equivale all'ultimo termine di un'equazione al quadrato delle differenze che si deriverebbe da una proposta equazione in ζ di grado n, cioè dalla

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \frac{(-1)^\alpha S(1^\alpha, 0^{n-\alpha})\zeta^{n-\alpha}}{p_\alpha p_{n-\alpha}} = 0$$

le cui radici fossero espresse dalle n basi $a, b, c\ldots\ldots x, y, z$. Per ottenere il valore espresso pei coefficienti dell'equazione proposta, si svilupperà il 2.° membro della (R') seguendo le 4 regole del § 45, dietro cui si verrà a formare una serie di simetriche, ciascuna delle quali sarà in generale espressa da $S(\alpha', \beta', \gamma'\ldots\ldots\zeta')$. Colla ripetuta applicazione della formola (a) del § 43 si ridurrà ciascuna di esse a non contenere che S della forma $S(\rho, 0^{n-1})$. La ripetuta applicazione della formola (b) dello stesso paragrafo convertirà ciascuna di queste in altre S della forma $S(1^\delta, 0^{n-\delta})$, le quali non essendo che i coefficienti della proposta equazione, si

sarà ottenuto l'ultimo termine dell' equazione ai quadrati delle differenze espresso pei coefficienti noti della proposta, ciò che basta, come ha dimostrato il sig. Cauchy, per ottenere i limiti delle radici. Il precedente processo parmi più breve ed uniforme del metodo dal citato autore esposto negli *Exercices de mathématique*, *quatrième année*, p. 103, e di quello dato da Lagrange nell'opera *Traité de la résolution des équations numériques*.

99. Nella stessa ipotesi del § 94, se nel prodotto $ABCDE....$ di un numero p_n di fattori si sostituiscano ad essi rispettivamente i p_n gruppi nati dallo sviluppo dell'alternante $D\left\{a^{a'}b^{b'}c^{c'}....y^{y'}z^{z'}\right\}$, il prodotto stesso qualunque siano gli esponenti a', b', $c'....y'$, z' si ridurrà alla forma

$\pm(abcd....yz)^{q p_{n-1}}$ essendo $q = a'+b'+c'+....+y'+z'$,

valendo il $+$ o il $-$ secondo che n sarà $>$ di 3 ovvero <4. Siccome i gruppi di $S(n)$ e $D(n)$ non differiscono che pei segni, così, astrazion fatta dal segno, avrà luogo lo stesso discorso del § 45. Ma siccome i segni negativi nello sviluppo della D saranno in numero $\frac{1}{2}p_n$, così avrà luogo il $+$ o il $-$ nel prodotto in questione secondo che $\frac{1}{2}p_n$ sarà pari o dispari, ma avuto riguardo a ciò che rappresenta p_n § 43, sarà $\frac{1}{2}p_n$ pari o dispari secondo che n sarà >3 ovvero <4.

100. Se si suppone, come nel § 40, che la funzione proposta $f(a, b, c....x, y, z)$ sia della forma

$$\pm f_1(a,b,c....x,y,z)\pm f_2(a,b,c....x,y,z)\pm f_3(a,b,c....x,y,z)\pm....$$

ove una qualunque f_m contiene tutte le n basi che voglionsi assoggettare all'operazione D, si avrà

$$D\left\{f(a, b, c....x, y, z)\right\} = \pm D\left\{f_1\right\}\pm D\left\{f_2\right\}\pm D\left\{f_3\right\}\pm....$$

ossia, poste le funzioni sotto l'adottata forma simbolica, sarà

$$D(g)^g = \pm D(g)^{g_1} \pm D(g)^{g_2} \pm D(g)^{g_3} \pm \ldots$$

ove le $g_1, g_2, g_3 \ldots$ rappresenteranno una serie di n indici distinti, giacchè esse si riferiscono a funzioni di forme distinte alle quali si dovrà aver riguardo quando si passerà dai gruppi simbolici agli effettivi, come si è osservato al citato paragrafo.

101. Se si assoggetta la stessa alternante $D(g)^g$, sia all'operazione S, sia ad un ripetuto numero $= r$ di operazioni D che indicheremo con $D^{(r)}(g)^g$, si avrà nel 1.° caso $SD(g)^g = DS(g)^g = 0$ e nel 2.° $D^{(r)}(g)^g = (p_n)^{r-1} D(g)^g$. Di fatto nel 1.° caso i differenti gruppi che nascono dall'eseguire l'operazione S sulla $D(g)^g$, ovvero l'operazione D sulla $S(g)^g$, si distruggeranno a due a due in forza della proprietà dell'alternante di cambiar di segno ad ogni alternazione. Nel 2.° caso supposta la serie dei gruppi della $D(g)^g$ rappresentata da

$$G - G_1 + G_2 - \ldots\ldots \pm G_m \ldots\ldots \pm G_{p_n - 1},$$

ove nella generica avrà luogo il $+$ o il $-$ secondo che il numero m d'alternazioni sarà pari o dispari, ed essendo $G = (g)^g$, si avrà pel paragrafo precedente

$$DD(g)^g = D^{(2)}(g)^g = D(G) - D(G_1) + D(G_2) - \ldots \pm D(G_{p_n - 1}).$$

Ma si ha $D(G_m) = \pm D(G)$, valendo il $+$ o il $-$ secondo che il numero d'alternazioni per passare da G_m a G sarà pari o dispari, ossia secondo che m sarà pari o dispari, sarà dunque nel caso nostro

$$D^{(2)}(g)^g = p_n D(G) = p_n D(g)^g.$$

Se alla $D(g)^g$ di questo 2.° membro si sostituisce lo stesso

sviluppo in gruppi alternati di segno, come si è fatto sopra, si avrà $D^{(3)}(g)^g = (p_n)^2 D(g)^g$. Procedendo ad ulteriori operazioni D, si avrà $D^{(r)}(g)^g = (p_n)^{r-1} D(g)^g$.

102. Se la funzion proposta $f(a, b, c \ldots x, y, z) = (g)^g$ di un numero n di basi è simetrica rispetto ad un numero di basi eguale ovvero minore di n, si avrà $D(g)^g = 0$. Supponiamo in fatti che la funzione proposta sia simetrica rispetto alle sole due basi h, k della serie g. In tal caso nel gruppo simbolico $(g)^g$ che la rappresenta dovranno supporsi eguali fra loro gl' indici rispettivi h, k in quanto rimane invariabile coll'alternazione delle corrispondenti basi h, k. Ma l'alternante $D(g)^g$ essendo una funzione alternata, sia rispetto alle basi che rispetto agl' indici § 56, diventa zero quando si suppongono due indici eguali fra loro. Dunque in tale ipotesi anche l'alternante della funzion proposta dovrà ridursi a zero. Se la proposta funzione sarà simetrica rispetto ad un numero di basi maggiore di 2, un maggior numero d'indici dovranno eguagliarsi fra loro, e perciò a più forte ragione dovrà ridursi a zero l'alternante in quistione. Il caso di $D\,S(n) = 0$ del paragrafo precedente è compreso in questo in cui la proposta funzione sia simetrica rispetto a tutte le n basi.

103. Ne deriva che se la proposta funzione si può ridurre a due parti $f_1(a, b, c \ldots x, y, z) \pm f_2(a, b, c \ldots x, y, z)$, la seconda soltanto delle quali sia simetrica rispetto ad un numero qualsivoglia di basi, siccome pel § 100 si avrebbe $D(f) = D(f_1) \pm D(f_2)$, e pel paragrafo precedente sarà $D(f_2) = 0$, così si avrà $D(f) = D(f_1)$. Perciò potrà esistere l'equazione $D(F) = D(F_1)$ senza che sia $F = F_1$, purchè la differenza $F - F_1$ sia una funzione simetrica di due o più basi della serie g rispetto a cui intendesi eseguita l'operazione D.

104. In forza del § 83 risulta che non potrà esistere fra n basi una funzione alternata desunta dalla $D(g)^g$ i cui

gruppi non contengano almeno un numero $n-1$ di basi. In questo caso l'alternante è incompleta e potrà considerarsi come un caso particolare di un'alternante completa, alla quale verrà ricondotta quando si moltiplichi ciascun gruppo o colla base che vi manca elevata ad un esponente destinato a divenir zero, o con una base destinata a divenire eguale all'unità elevata ad esponente eguale all'indice che manca nel gruppo. Diconsi funzioni alternate *semplici* quelle che derivano, o immediatamente da un'alternante sola sia completa, sia incompleta, o dall'aggregato di più alternanti come nel § 100. Ordinati opportunamente i termini in un numero p_n di gruppi per ciascun sistema d'indici $g_1, g_2, g_3 \ldots$ fatti di n o di $n-1$ basi, si cercherà fra essi il gruppo fondamentale $(g)^\varepsilon$ o il gruppo completato $(g-z)^{\varepsilon-z} z^z$ in ciascun sistema d'indici $g_1, g_2 \ldots$ ove l'esponente z sta per lo zero. La funzione alternata semplice di cui si tratta sarà il risultato dello sviluppo di

$$D(g)^\varepsilon \text{ o di } \pm D(g)^{\varepsilon_1} \pm D(g)^{\varepsilon_2} \pm D(g)^{\varepsilon_3} \pm \ldots$$

fra le quali potranno trovarsi delle alternanti incomplete. Diconsi poi funzioni alternate *complesse* quelle che derivano da variate combinazioni di alternanti, sì complete che incomplete, sia da particolari funzioni delle medesime o da un opportuno modo di disposizione delle diverse basi fra loro, al che basteranno gli esempi che offro nei seguenti paragrafi.

105. Così in particolare se si rappresenti come nel § 46 con $A', A'', A''' \ldots A^h$ un numero h di funzioni alternate rispetto alle stesse n basi della serie g, la $F(A', A'', A''' \ldots A^h)$, nell'ipotesi che la funzione F sia una funzione dispari delle stesse $A', A''' \ldots A^h$, sarà una funzione alternata complessa delle n basi in questione. Potranno le $A', A'' \ldots$ essere le stesse alternanti designate indietro con $D(g)^{\varepsilon_1}, D(g)^{\varepsilon_2} \ldots$ e potrebbero anche essere

esse stesse funzioni alternate già complesse, ed in questo secondo caso più complicata ne diverrebbe l'espressione.

Giova avvertire che le alternazioni potendo aver luogo fra enti o cose in genere non limitate come nel § 48 a rappresentare quantità algebriche, la proprietà della funzione pari comune colla simetrica, e della funzion dispari cumune coll'alternata, e l'analogia che esiste fra l'alternazione di tutti i segni $+$ coi segni $-$ innanzi alle contemplate basi nelle funzioni pari o dispari coll'alternazione fra due qualunque basi nelle simetriche ed alternate, rendono più consentanea la denominazione di simetrica od alternata *pei segni* che quella di funzione pari o dispari.

106. Sia data una funzione qualunque $f(\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu)$ fra m variabili, ed $n > m$ sia un numero di basi $a, b, c, d \ldots y, z = g$. Se colle g basi si fanno tutte le combinazioni ad m ad m indicate dalle serie

$$(g_1), (g_2), (g_3) \ldots (g_{m-1}), (g_m) \qquad (a)$$

e sia γ la serie arbitraria degli m indici $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \mu$, destinata a rappresentare simbolicamente la proposta funzione, il prodotto

$$D(g_1)^\gamma D(g_2)^\gamma D(g_3)^\gamma \ldots D(g_{m-1})^\gamma D(g_m)^\gamma \qquad (b)$$

i cui fattori nascono dall'alternante fondamentale $D(\gamma)^\gamma$, ove alla serie γ delle basi si sostituiscano gli m termini della serie (a), sarà una funzione complessa alternata o simetrica secondo che sarà o non sarà zero l'espressione $p' + p'' - p$, essendo p, p', p'' i numeri delle diverse potenze del 2 contenute rispettivamente nelle differenze $m-2$, $m-2$, $n-m$. Esse sarà sempre un'alternata complessa per $m = 2$ qualunque siasi n. Di fatto scelte due basi qualunque h, k, la serie potrà ordinarsi in quattro serie della forma

$$\left(hkP,\ hQ,\ kQ,\ R\right) \qquad (c),$$

ove le P, Q; R consteranno di tutte le combinazioni rispettivamente a $m-2$ a $m-2$; a $m-1$ a $m-1$; ad m ad m delle $n-2$ basi contenute nelle serie $g-(h, k)$, l'alternazione fra h, k cambierà la (c) nella

$$\left(khP,\ kQ,\ hQ,\ R\right) \qquad (d).$$

A ciascun gruppo delle quattro serie (c) si apponga la serie γ d'indici ed applicatovi il simbolo D, si componga il prodotto (b). L'alternazione fra h, k, che cambia la (c) in (d), lascerà invariato il prodotto di tutte le alternanti che risultano dai gruppi delle tre serie hQ, kQ, R, e ridurrà di segno contrario tutte le alternanti che appartengono alla prima serie hkP. Eseguita l'alternazione, il prodotto in questione si cambierà in

$$(-)^{\delta} D(g_1)^{\gamma} D(g_2)^{\gamma} D(g_3)^{\gamma} \ldots . D(g_{m-1})^{\gamma} D(g_m)^{\gamma},$$

essendo δ il numero de' gruppi delle serie P. Siccome un tal discorso vale per due qualunque delle basi della g, il prodotto (b) sarà una funzione simetrica od un'alternata secondo che δ sarà pari o dispari. Ma il numero δ, dietro i principj delle combinazioni, può ridursi all'espressione in cui si cambia la d del § 25 quando si numeri n, λ, μ, omessi tutti gli altri, si sostituiscano rispettivamente i numeri $n-2$, $m-2$, $n-m$. Per lo stesso paragrafo sarà dunque δ dispari o pari, e perciò la (b) una funzione alternata o simetrica secondo che

$$(n-2)+p'+p''-\left(p+(m-2)+(n-m)\right)=p'+p''-p$$

sarà o non sarà zero. Se poi si suppone $m=2$, siccome uno solo sarà il fattore $D(hk)^{\gamma}$ della (b) in cui entrano congiuntamente le due designate basi h, k, così sarà $\delta=1$, e perciò il prodotto stesso sarà sempre una funzione alternata.

Supposto $n=171$, $m=17$, si avrà

$$n-2=2^7+2^5+2^3+2^0,\quad m-2=2^3+2^2+2^1+2^0,\quad n-m=2^7+2^4+2^3+2^1,$$

onde risultando $p = 4$, $p' = 4$, $p'' = 4$, l'espressione $p' + p'' - p$ non sarà zero, e perciò il prodotto in questione sarà una funzione simetrica. Ma per $n = 171$, $m = 11$, siccome risulterà $p = 4$, $p' = 2$, $p'' = 2$, e perciò $p' + p'' - p = 0$, il prodotto stesso sarà una funzione alternata.

107. Per $m = 3$ il prodotto (b) sarà una funzione simetrica od alternata secondo che n sarà pari o dispari. In tal caso in fatti la $m - 2 = 1$ darà $p' = 1$, e supposto $\alpha, \beta, \gamma \ldots, \lambda, \mu$ una serie di numeri interi e decrescenti, si avrà generalmente

$$n - 2 = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma + \ldots + 2^\lambda + 2^\mu$$

ove sarà μ zero o diversa da zero secondo che n sarà dispari o pari. Ma essendo $n - m = (n-2) - 1 = (n-2) - 2^0$

si avrà $$n - m = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma + \ldots + 2^\lambda + 2^\mu - 2^0.$$

Ma si ha $$2^\mu - 2^0 = 2^{\mu-1} + 2^{\mu-2} + \ldots + 2^1 + 2^0$$

il cui numero di termini è $= \mu$, e perciò $= 0$ per $\mu = 0$. Sarà dunque $p'' = p - 1 + \mu$, onde $p' + p'' - p = \mu$. Dunque per n dispari, essendo $\mu = 0$, il prodotto (b) sarà una funzion alternata, e per n pari non essendo μ zero, sarà una funzion simetrica.

108. Nell'ipotesi di $m = 2$ in cui il prodotto (b) è sempre una funzion alternata, e ammesso che la proposta funzione che si ridurrà a $f(\alpha, \beta)$ sia data da $\sin\beta \cos\alpha$, il prodotto (b) nel caso di $g = a, b, c, d$, diverrà

$$D\{(b)^\alpha(a)^\beta\}D\{(c)^\alpha(a)^\beta\}D\{(d)^\alpha(a)^\beta\}D\{(c)^\alpha(b)^\beta\}D\{(d)^\alpha(b)^\beta\}D\{(d)^\alpha(c)^\beta\}$$

ove eseguita l'operazione D e passando dai gruppi simbolici agli effettivi risulterà la funzione alternata complessa

$$\sin(b-a)\sin(c-a)\sin(d-a)\sin(c-b)\sin(d-b)\sin(d-c),$$

Parimente supposto $m = 3$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = \sin\alpha \cos\beta \tang\gamma$ e $g = a, b, c, d$, essendo n numero pari $= 4$, il prodotto (b) dovrà dare pel paragrafo precedente una funzione simetrica. Di fatto l'espressione (b) diverrà in questa ipotesi

$$D\{(a)^\alpha(b)^\beta(c)^\gamma\}D\{(a)^\alpha(b)^\beta(d)^\gamma\}D\{(a)^\alpha(c)^\beta(d)^\gamma\}D\{(b)^\alpha(c)^\beta(d)^\gamma\}.$$

Sviluppate le alternanti D e ridotti i gruppi simbolici in effettivi ed introdotti i seni delle differenze, si riduce alla simetrica complessa $ABCD$, essendo

$$A = \sin(a-b)\tang c + \sin(c-a)\tang b + \sin(b-c)\tang a\,,$$

$$B = \sin(a-b)\tang d + \sin(d-a)\tang b + \sin(b-d)\tang a\,,$$

$$C = \sin(a-c)\tang d + \sin(d-a)\tang c + \sin(c-d)\tang a\,,$$

$$D = \sin(b-c)\tang d + \sin(d-b)\tang c + \sin(c-d)\tang b.$$

109. Dalla dimostrazione data al § 106 risulta pure che se le diverse alternanti date dai gruppi della serie (a) in vece di combinarsi fra loro per via di prodotto come nella (b) si aggreghino per via di somme o di differenze, il risultato non sarà in generale nè una funzione simetrica, nè una funzione alternata rispetto alle n basi della serie g, giacchè l'alternazione fra due basi qualunque h, k indurrà bensì cambiamento di segno nelle alternanti provenienti dai gruppi della prima delle serie (c), ma rimanendo invariate quelle che provengono dalle altre tre, il risultato non potrà nè rimanere invariato, nè cambiar di segno conservando lo stesso valore.

110. Il prodotto $D(g-z)^{\varepsilon-z}D(g-y)^{\varepsilon-z}D(g-x)^{\varepsilon-z}\ldots D(g-a)^{\varepsilon-z}$ i cui fattori sono le n alternanti che ottengonsi dallo sviluppo della $D(g)^\varepsilon$ a seconda di uno stesso indice z, dietro la formola (i) del § 73, sarà una funzione simetrica od una

alternata secondo che n sarà pari o dispari. Di fatto chiamato Q il prodotto in questione, il numero de' fattori di Q in cui entreranno congiunte due basi qualunque h, k sarà $n-2$, giacchè non possono comparire disgiunte che nei soli due fattori $D(g-h)^{g-2}D(g-k)^{g-2}$, il cui prodotto rimane invariato coll'alternazione di h, k. Ma l'alternazione stessa inducendo segno contrario agli altri $n-2$ fattori, la Q si ridurrà al termine $(-1)^{n-2}Q$, il quale essendo positivo per n pari e negativo per n dispari, ne segue che il proposto prodotto sarà una funzione simetrica od alternata secondo che n sarà pari o dispari.

Considerato il prodotto Q come un caso particolare del prodotto (b) del § 106, cioè il caso in cui si faccia $m=n-1$, ne deriva $n-m=2^0$, onde $p''=1$. Essendo in generale $n-2=2^\alpha+2^\beta+\cdots\cdots+2^\lambda+2^\mu$, si avrà

$$m-2=(n-2)-2^0=2^\alpha+2^\beta+\cdots\cdots+2^\lambda+2^\mu-2^0,$$

sarà dunque $p'=p-1+\mu$ e si avrà come nel paragrafo precedente $p'+p''-p=\mu$. Ne segue che Q sarà una funzione alternata o simetrica secondo che μ sarà o non sarà zero, ma il caso di $\mu=0$ è quello in cui n sia dispari, dunque sarà Q una funzione simetrica od alternata secondo che n sarà pari o dispari come si è già provato.

111. Oltre le già esposte, altre combinazioni possono concepirsi, i risultati delle quali siano funzioni alternate ancor più complesse delle già trattate, di modo che qualora esse venissero originariamente proposte, meno manifesta comparisse la genesi della loro formazione. Deriva di quì che per quanto uniforme e determinata sia l'operazione con cui si producano funzioni simetriche od alternate, altrettanto complessa ed indeterminata è la questione inversa di risalire da una funzion simetrica od alternata complessa alla sua generatrice.

Ciò non ostante, comunque complessa possa essere una funzione proposta di tal specie, eseguiti su di essa gli opportuni sviluppi potrà sempre ridursi ad una funzione alternata semplice tutt'al più della forma

$$\pm D(g)^{\varepsilon_1} \pm D(g)^{\varepsilon_2} \pm D(g)^{\varepsilon_3} \pm \ldots .$$

ove i diversi termini potranno essere alternanti complete od incomplete o in parte complete ed in parte incomplete, come si è avvertito ai §§ 100 e 104, e si potrà così risalire ai primitivi gruppi fondamentali da cui coll'operazione D può intendersi generata.

Così in particolare la funzione alternata complessa

$$sin(b-a)\, sin(c-a)\, sin(c-b)$$

la cui formazione è contemplata nel § 106 qualora sia sviluppata si riduce alla più semplice delle forme superiormente accennate. Giacchè si troverà per gruppo fondamentale designato indietro simbolicamente con $(a)^a\,(b)^b\,(c)^c$ la funzione $\frac{1}{2}\, sin^2 a\, cos^2 b\, sin\, 2c$ e perciò sarà

$$sin(b-a)\, sin(c-a)\, sin(c-b) = D\left\{\tfrac{1}{2} sin^2 a\, cos^2 b\, sin\, 2c\right\} = \tfrac{1}{2} D\left\{sin^2 a\, cos^2 b\, sin\, 2c\right\}$$

Risulterà così la funzione alternata proposta espressa semplicemente per un'alternante completa, che è il caso più semplice. Parimente se si sviluppa la funzione alternata complessa del § 108, il gruppo fondamentale simbolico $(g)^\varepsilon = (a)^a\,(b)^b\,(c)^c\,(d)^d$ si troverà espresso dal gruppo effettivo

$$\left(cos^3(a)\right)(sin^3 b)(cos^2 c\, sin\, c)(sin^2 d\, cos\, d) = \tfrac{1}{4}\left\{cos^3 a\, sin^3 b\, cos\, c\, sin\, 2c\, sin\, d\, sin\, 2d\right\}$$

e perciò

$$\left\{\begin{array}{l} sin(b-a)\, sin(c-a)\, sin(c-b)\, sin(d-a)\, sin(d-b)\, sin(d-c) = \\ \qquad = \tfrac{1}{4} D\left\{cos^3 a\, sin^3 b\, cos\, c\, sin 2c\, sin\, d\, sin\, 2d\right\} \end{array}\right\}$$

ove la funzione proposta è espressa sotto la forma che si è indicata sopra, ridotta per questo caso particolare ad una sola alternante completa. Potrebbero addursi esempi in cui si avrebbero più alternanti aggregate fra loro composte di differenti funzioni fra le stesse n od $n-1$ basi.

112. Per mostrare qualche applicazione dei risultati ottenuti ne' precedenti paragrafi rispetto alle alternanti, supponiamo che sia dato fra n incognite $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ un sistema di n equazioni non riducibili a zero pel valor zero delle incognite stesse. Si riterrà per le quantità cognite la denominazione di *parametri* del sistema. Comunque i parametri siano quantità fisse e determinate o numeri fra loro indipendenti, ovvero siano funzioni di quantità arbitrarie, potranno le date n equazioni rappresentarsi col sistema simbolico

$$\left.\begin{array}{l}
(a)^a(\zeta)^a+(a)^b(\zeta)^b+(a)^c(\zeta)^c+\cdots+(a)^h(\zeta)^h+\cdots+(a)^z(\zeta)^z=(a)^\zeta\\
(b)^a(\zeta)^a+(b)^b(\zeta)^b+(b)^c(\zeta)^c+\cdots+(b)^h(\zeta)^h+\cdots+(b)^z(\zeta)^z=(b)^\zeta\\
\vdots\\
(p)^a(\zeta)^a+(p)^b(\zeta)^b+(p)^c(\zeta)^c+\cdots+(p)^h(\zeta)^h+\cdots+(p)^z(\zeta)^z=(p)^\zeta\\
\vdots\\
(z)^a(\zeta)^a+(z)^b(\zeta)^b+(z)^c(\zeta)^c+\cdots+(z)^h(\zeta)^h+\cdots+(z)^z(\zeta)^z=(z)^\zeta
\end{array}\right\}\quad (S)$$

o più compendiosamente con

$$\left\{\begin{array}{l}
\Sigma\left((a)^g(\zeta)^g\right)=(a)^\zeta,\ \Sigma\left((b)^g(\zeta)^g\right)=(b)^\zeta,\ \Sigma\left((c)^g(\zeta)^g\right)=(c)^\zeta\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\Sigma\left((p)^g(\zeta)^g\right)=(p)^\zeta\ldots\ldots\ldots\Sigma\left((z)^g(\zeta)^g\right)=(z)^\zeta
\end{array}\right\}\quad (S)$$

ove il simbolo Σ indica la somma dei termini che nascono col sostituire alla g una dopo l'altra le n lettere $a, b, c \ldots h \ldots p \ldots x, y, z$ di cui essa consta e le n quantità $(\zeta)^a, (\zeta)^b \ldots (\zeta)^n$ rappresentano le incognite, e le altre espressioni tengon luogo dei parametri.

Si moltiplichi ciascuna equazione della (S), incominciando dall'ultima progredendo verso la prima rispettivamente per

$$\left\{\begin{array}{l} D(g-z)^{g-h}, \quad -D(g-y)^{g-h}, \quad +D(g-x)^{g-h} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \pm D(g-p)^{g-h} \ldots\ldots\ldots\ldots \pm D(g-a)^{g-h} \end{array}\right\}$$

ove nel termine generale abbia luogo il $+$ o il $-$ secondo che il posto π della base p sarà pari o dispari. Sommate tutte queste equazioni e raccolti i coefficienti delle incognite $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b \ldots (\zeta)^h \ldots (\zeta)^z$, si vedrà che in forza della (j') del § 74 ove pongansi per k, z tutte le lettere della serie $g-h$, tutti i coefficienti si annullano, ad eccezione di quello dell'incognita generica $(\zeta)^h$ che in forza della (i') del § 73 si riduce a $\pm D(g)^g$, valendo il segno superiore od inferiore secondo che il posto π' della h nella serie g degl'indici sarà dispari o pari. Il secondo membro in forza della (β') del citato paragrafo si ridurrà a $D(g)^{\gamma-h}$, ove γ equivale alle serie ordinate $a, b, c, d \ldots h \ldots y, z, \zeta$. L'equazione risultante, portando il doppio segno nel 2.° membro si ridurrà a $D(g)^g(\zeta)^h = \pm D(g)^{\gamma-h}$ ove avrà luogo il segno $+$ o il $-$ secondo che la h nella serie g degl'indici occupa un posto π' dispari o pari. Si chiami g_1 ciò che diventa g quando si sostituisce ζ alla h, ossia si faccia $g_1 = a, b, c \ldots \zeta \ldots y, z$ che si esprimerà con $g(h=\zeta)$ e si chiami g_2 ciò che diventa g_1 quando si trasporta la ζ all'estremità a destra. Sarà $g_2 = \gamma - h$. Il numero del posto della h nella serie g essendo π', il numero $= \delta$ d'alternazioni fra gl'indici per passare da $(g)^{g_1}$ a $(g)^{g_2}$ sarà dato § 66 da $\delta = \pi' - 1$. Ma dal § 55 risulta $D(g)^{g_1} = \pm D^{\delta}(g)^{g_1}$ ove vale il $+$ o il $-$ secondo che δ è pari o dispari, e perciò secondo che π' sarà dispari o pari ed essendo $D^{\delta}(g)^{g_1} = D(g)^{g_2}$, per cui

$$D(g)^{g_1} = \pm D(g)^{g_2} = \pm D(g)^{\gamma-h},$$

si avrà

$$D(g)^g(\zeta)^h = D(g)^{g(h=\zeta)} \qquad (e)$$

113. Se un dato sistema di n equazioni si pone in vece sotto la forma

$$\Sigma(g)^a(g)^\zeta = (\zeta)^a,\ \Sigma(g)^b(g)^\zeta = (\zeta)^b \ldots \Sigma(g)^h(g)^\zeta = (\zeta)^h \ldots \Sigma(g^z(g)^\zeta = (\zeta)^z \qquad (S')$$

in cui le n incognite sono ora espresse da

$$(a)^\zeta,\ (b)^\zeta,\ (c)^\zeta \ldots (h)^\zeta \ldots (z)^\zeta,$$

ed i coefficienti sono rappresentati da altre serie di elementi, siccome il sistema (S') è l'invertito del sistema (S), l'equazione risultante rispetto al sistema (S') si otterrà coll'invertire l'equazione (e) del precedente paragrafo che è la risultante rispetto al sistema (S); essa sarà data da

$$D(g)^g(h)^\zeta = D\big(g(h=\zeta)\big)^g \qquad (e').$$

Questa poteva anche direttamente ottenersi seguendo lo stesso processo impiegato per ottenere la (e) servendoci in questo caso delle equazioni (c'), (b'), (β) dei §§ 74, 71 e 72 in luogo delle (j'), (i'), (β') che ne sono le invertite.

114. Abbiansi due sistemi (H), (K) di n equazioni lineari fra le n incognite $(\xi)^a$, $(\xi)^b$, $(\xi)^c \ldots (\xi)^z$ pel sistema (H) e le n incognite $(a)^\xi$, $(b)^\xi$, $(c)^\xi \ldots (z)^\xi$ pel sistema (K). Siano rappresentati con $(a)^\zeta$, $(b)^\zeta \ldots (z)^\zeta$ i secondi membri delle equazioni del sistema (H) e con $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b \ldots (\zeta)^z$ quelli del sistema K. Se i coefficienti delle incognite della 1.ª, 2.ª, 3.ª .... n^a linea orizzontale del sistema (H) sono rispettivamente eguali ai coefficienti della 1.ª, 2.ª, 3.ª .... n^a linea verticale del sistema (K), potrà il sistema (H) rappresentarsi col sistema (S), ed in tal caso il sistema (K) verrà rappresentato dal sistema (S'). Si deduce allora dalle due precedenti equazioni (e), (e'), in

cui l'alternante $D(g)^g$ ha un valore comune, che due incognite omologhe $(\xi)^h$, $(h)^\xi$ nei due sistemi staranno fra loro come le alternanti invertite $D(g)^{g(h=\zeta)}$, $D\big(g(h=\zeta)\big)^g$.

115. Se nel sistema (S') si suppone che la serie g degli indici che rappresentano in generale funzioni qualunque si cambi in una serie di esponenti rispettivamente rappresentati da $0, 1, 2, 3 \ldots (n-1)$, ossia che, tolte le parentesi alle basi che possono avere valori qualunque, si stabiliscano fra gl'indici le seguenti eguaglianze

$$a=0,\quad b=1,\quad c=2,\quad d=3 \ldots y=n-2,\quad z=n-1$$

le quantità cognite del sistema (S') cesseranno di essere simboliche e saranno potenze intere delle basi $a, b, c \ldots y, z, \zeta$. Un'incognita generica $(h)^\zeta$ in un tal sistema sarà data dall'espressione effettiva

$$(h)^\zeta = \frac{(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)\ldots(\zeta-z)}{(h-a)(h-b)(h-c)\ldots(h-z)}$$

ove mancherà nel numeratore il fattore $(\zeta-h)$ e nel denominatore il fattore $(h-h)$. Di fatto pel § 95 si ha nell'assunta ipotesi

$$D(g)^g = \left\{\begin{matrix}(b-a)(c-a)(c-b)\ldots(h-a)(h-b)(h-c)\ldots(h-g)(i-a)(i-b)\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots(i-h)\ldots(z-a)(z-b)\ldots(z-h)\ldots(z-x)(z-y)\end{matrix}\right\}$$

e siccome la $D\big(g(h=\zeta)\big)^g$ è la stessa $D(g)^g$ in cui si rimpiazzi la base h colla ζ, sarà

$$D\big(g(h=\zeta)\big)^g = \left\{\begin{matrix}(b-a)(c-a)(c-b)\ldots(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)\ldots(\zeta-g)(i-a)(i-b)\ldots \\ \ldots\ldots(i-\zeta)\ldots(z-a)(z-b)\ldots(z-\zeta)\ldots(z-x)(z-y)\end{matrix}\right\}$$

Posti questi valori delle alternanti nell'equazione (e') del § 113, tolti i fattori comuni al numeratore ed al denominatore

nel valore dell'incognita $(h)^{\zeta}$, non resteranno che i fattori che contengono la h nel denominatore e la ζ nel numeratore, e si otterrà

$$(h)^{\zeta} = \frac{(\zeta-a)(\zeta-b)\ldots(\zeta-g)(i-\zeta)(k-\zeta)(l-\zeta)\ldots(y-\zeta)(z-\zeta)}{(h-a)(h-b)\ldots(h-g)(i-h)(k-h)(l-k)\ldots(y-h)(z-h)}$$

Cambiati i segni ai fattori $(i-\zeta)(k-\zeta)\ldots(z-\zeta)$ nel numeratore ed all'egual numero di fattori $(i-h)(k-h)\ldots(z-h)$ nel denominatore, si ottiene per l'incognita l'espressione in questione. È da avvertirsi che quando si sostituisca ad h un'altra lettera della serie g, per esempio la c onde ottenere la relativa incognita $(c)^{\zeta}$, si dovrà nel numeratore ommettere il fattore $\zeta - c$, in quanto nel denominatore non può esistere il fattore $(c-c)$.

116. In un sistema di n equazioni lineari i parametri che supporremo quantità finite possono avere valori fissi e determinati o possono essere funzioni di quantità arbitrarie da determinarsi. Nel 1.° caso si diranno parametri costanti, e nel 2.° parametri variabili. Se non esiste nel sistema alcuna condizione a cui i parametri possano essere assoggettati, ossia rimanendo i parametri affatto indipendenti, l'equazione (e) ovvero la (e') fornirà un sistema unico di valori delle incognite atte a soddisfare il proposto sistema d'equazioni. Ma se esistono condizioni che vincolando l'assoluta indipendenza dei parametri riducano a zero una delle alternanti che entrano nella (e) o nella (e'), si dedurranno particolari conseguenze secondo che i parametri saranno costanti o variabili. Chiameremo *determinato* quel sistema di n equazioni che è soddisfatto da un sistema unico di valori finiti delle n incognite; *indeterminato* se può essere soddisfatto con più di un sistema di valori delle incognite, ed *incompatibile* quando non può essere soddisfatto con alcun sistema di valori finiti delle incognite stesse.

117. Ne deriva che cavato dalla (e) il valore dell'incognita generica dato da

$$(\zeta)^k = \frac{D(g)^{g(h=\zeta)}}{D(g)^g} \qquad (e)$$

relativo al sistema (S), o dalla (e') il valore dell'incognita generica dato da

$$(h)^\zeta = \frac{D(g(h=\zeta))^g}{D(g)^g} \qquad (e')$$

relativo al sistema (S'), nell'ipotesi dei parametri costanti i sistemi (S), (S') saranno determinati se le incognite generiche $(\zeta)^k$, $(h)^\zeta$ si conservano finite e determinate per tutti i valori di h compresi nella serie g; saranno incompatibili se le incognite stesse per qualche valore di h si presentano o immediatamente, o dopo opportune riduzioni sotto la forma $\left(\frac{1}{0}\right)$; saranno indeterminati se per ciascun valore di h presentandosi le incognite sotto la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$; per nessun valore di h possano ridursi a quantità finite od infinite, vale a dire se tutte le incognite rimangano assolutamente indeterminate.

I sistemi (S), (S') a parametri variabili cesseranno in generale di essere incompatibili quando si possa disporre delle arbitrarie in modo che nessuna delle incognite assuma il valore $\left(\frac{1}{0}\right)$. Se alcune presupposte condizioni annulleranno per ciascun valore di h il numeratore delle (e), (e'), le arbitrarie dei parametri saranno vincolate alla condizione di dovere adempiere l'equazione $D(g)^g = 0$, la quale sarà la risultante dall'eliminazione delle incognite dal sistema (S) o dal sistema (S'). Se all'incontro alcune presupposte condizioni annullano la $D(g)^g$, i parametri allora saranno vincolati dalla condizione $D(g)^{g(h=\zeta)} = 0$ rispetto al sistema

(S) o dalla $D\big(g(h=\zeta)\big)^g = 0$ rispetto al sistema (S'), le quali condizioni dovranno avverarsi per tutti i valori di h della serie g.

118. Così in particolare ammesso che si annullino tutti gli elementi o parametri affetti dalla stessa base, per esempio dalla base z onde abbiansi le condizioni

$$(z)^a = (z)^b = (z)^c = \cdots = (z)^y = (z)^z = 0, \qquad (a)$$

si avrà pel § 85 $D(g)^g = 0$. Il sistema (S) supposto a parametri costanti sarà incompatibile, e supposto a parametri variabili, le ammesse condizioni involgeranno la condizione $(z)^\zeta = 0$. In fatti l'equazione (e) darà il sistema delle incognite

$$(\zeta)^z = \frac{D(g)^{g(z=\zeta)}}{D(g)^g}, \quad (\zeta)^y = \frac{D(g)^{g(y=\zeta)}}{D(g)^g} \cdots (\zeta)^a = \frac{D(g)^{g(a=\zeta)}}{D(g)^g}$$

Sviluppando i numeratori a seconda della base z ed introducendo le condizioni (a), si ottiene

$$(\zeta)^z = \frac{D(g-z)^{g-z}(z)^\zeta}{0}, \quad (\zeta)^y = \frac{D(g-y)^{g-y}(z)^\zeta}{0} \cdots (\zeta)^a = \frac{D(g-a)^{g-a}(z)^\zeta}{0}$$

Nessuna condizione riducendo zero i numeratori nel caso dei parametri costanti, i valori delle incognite si ridurranno ad $\left(\frac{1}{0}\right)$, e perciò il sistema sarà incompatibile. L'incompatibilità del sistema (S) in questo caso è dovuta soltanto all'ultima equazione di cui esso è composto, giacchè il 1.° membro è zero per le condizioni (a), mentre il 2.° membro non è zero. Se pertanto i parametri sono variabili, una delle arbitrarie sarà legata alla condizione $(z)^\zeta = 0$, ed il sistema cesserà di essere incompatibile.

Se nel caso de' parametri costanti si sopprime l'ultima equazione col supporre la condizione ulteriore $(z)^\zeta = 0$, il

nuovo sistema di $n-1$ equazioni fra n incognite darà fra le incognite stesse la relazione

$$(\zeta)^z:(\zeta)^y:(\zeta)^x\ldots:(\zeta)^a::D(g-z)^{g-z}:-D(g-z)^{g-y}:D(g-z)^{g-x}:\ldots:\pm D(g-z)^{g-a}$$

Il sistema di $n-1$ equazioni risulterà in tal caso indeterminato, giacchè per la precedente relazione riuscendo le incognite determinate in funzione di una fra esse, rimarrà quest'ultima affatto arbitraria e vi sarà un numero arbitrario di sistemi di incognite atti a soddisfare il sistema delle $n-1$ equazioni. Se oltre le condizioni (a) si stabiliscono altre condizioni, per esempio

$$(y)^a = (y)^b = (y)^c = \ldots\ldots = (y)^z = 0$$

il 2.° membro della (e) è annullato in forza di quest'ultima condizione per tutti i valori di h della serie g. I valori delle n incognite si presentano sotto la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$. Ma dividendo il numeratore e denominatore di ciascuna frazione rispettivamente per

$$D(g-z)^{g-z}, \quad D(g-z)^{g-y}, \quad D(g-z)^{g-x}\ldots\ldots D(g-z)^{g-a}$$

l'indeterminato valore $\left(\frac{0}{0}\right)$ delle incognite si riduce a $\left(\frac{1}{0}\right)$, e perciò il sistema è pure incompatibile. Ommesse quì parimente le ultime due equazioni che contengono esse sole l'incompatibilità, e ridotto il sistema ad un numero $n-2$ d'equazioni, esso sarà indeterminato in quanto tutte le incognite saranno date per due di esse che rimarranno affatto arbitrarie. Lo stesso si dirà per un maggior numero di condizioni di tale specie.

119. Se supponiamo ridotti a zero gli elementi affetti dallo stesso indice, per es. dall'indice z, ponendo cioè

$$(a)^z = (b)^z = (c)^z = \ldots\ldots = (y)^z = (z)^z = 0, \qquad (a)$$

sarà pel § 85 $D(g)^{g} = 0$. In tal caso il sistema (S) a parametri costanti sarà incompatibile, ed a parametri variabili condurrà all'ulteriore relazione $D(g)^{g(z=\zeta)} = 0$, la quale potrà verificarsi o col porre le n relazioni

$$(a)^{\zeta} = (b)^{\zeta} = (c)^{\zeta} = \cdots = (y)^{\zeta} = (z)^{\zeta} = 0 \qquad (c)$$

o colle n relazioni

$$D(g-z)^{g-z} = D(g-y)^{g-z} = D(g-x)^{g-z} = \cdots = D(g-a)^{g-z} = 0 \qquad (c')$$

ovvero con un numero qualunque m delle (c), o con un numero $n-m$ delle (c') scelte in modo che queste non contengano le basi che entrano nelle m condizioni delle (c). Di fatto i numeratori delle incognite $(\zeta)^{z}$, $(\zeta)^{y}$.... $(\zeta)^{b}$, $(\zeta)^{a}$ desunti dall'equazione (e) saranno rispettivamente dati dalle quantità

$$D(g)^{g(z=\zeta)}, \quad D(g)^{g(y=\zeta)} \ldots D(g)^{g(b=\zeta)}, \quad D(g)^{g(a=\zeta)}.$$

Se ciascuna di queste alternanti, tranne la 1.ª, si sviluppa colla formola (i) del § 73 a seconda dello stesso indice z tutti i termini degli sviluppi avranno per fattori alcuno degli elementi (a), e perciò tutte si ridurranno a zero. La 1.ª alternante non contenendo l'indice z, si ridurrà alla quantità finita

$$D(g)^{g(z=\zeta)} = D(g-z)^{g-z}(z)^{\zeta} - D(g-y)^{g-z}(y)^{\zeta} + \cdots \pm D(g-a)^{g-z}(a)^{\zeta} \qquad (d)$$

che risulta dall'aver sviluppata la $D(g)^{g}$ a seconda dell'indice z indi posto $z = \zeta$. Una delle incognite $(\zeta)^{z}$ presentandosi sotto la forma $\left(\frac{1}{0}\right)$ qualunque siano i valori delle altre, si dovrà conchiudere essere incompatibile il sistema quando esso sia a parametri costanti. Ma se i parametri sono variabili, l'equazione $D(g)^{g(z=\zeta)} = 0$, che deve avverarsi per la condizione stessa del sistema, condurrà, dietro la formola (d), alle condizioni enunciate nella proposizione.

120. Se in luogo delle condizioni (a) si fossero stabilite le condizioni generiche

$$(a)^h = (b)^h = (c)^h = \cdots = (\gamma)^h = (z)^h = 0, \qquad (h)$$

essendo h un indice qualunque della serie g, i valori delle incognite si sarebbero presentati sotto le forme

$$(\zeta)^x = \left(\frac{0}{0}\right), \quad (\zeta)^y = \left(\frac{0}{0}\right) \cdots (\zeta)^h = \left(\frac{1}{0}\right) \cdots (\zeta)^t = \left(\frac{0}{0}\right), \quad (\zeta)^z = \left(\frac{0}{0}\right)$$

e risulterebbe ancora incompatibile il sistema. L'incompatibilità in questo caso risiede in una qualunque delle equazioni del dato sistema in quanto una di esse non può generalmente essere verificata pei valori delle incognite somministrati dalle altre $n-1$ equazioni, vale a dire che il sistema di n equazioni essendo in forza delle condizioni (h) fra sole $n-1$ incognite, nè essendo verificata la condizione $D(g)^{g(h=\zeta)} = 0$, una qualunque delle equazioni del sistema non può essere conseguenza delle altre.

Parimente se si supponessero le condizioni che risultano dalle (h) col dare all'indice h un numero $= m$ di valori della serie g, scomparirebbe dal sistema un egual numero m d'incognite. Il sistema di n equazioni fra un numero $n-m$ d'incognite sarebbe incompatibile non potendo esser verificato con alcun sistema di valori determinati delle incognite stesse. In tal caso la questione si riduce a soddisfare al sistema, se non completamente, almeno il più prossimamente possibile col cercare i valori delle $n-m$ incognite in modo che i valori risultanti dai 1.i membri se non eguagliano quelli dei 2.i, se ne discostino il menomo possibile. La questione in tal caso si cambia nella ricerca dei valori più probabili delle incognite che si ottengono col metodo dei *minimi quadrati*.

Per un altro esempio, se sono verificate, oltre le condizioni (a) del precedente paragrafo, anche le condizioni (a) del

§ 118, il sistema a parametri costanti sarà ancora incompatibile. Di fatto per le condizioni (a) del paragrafo precedente la $D(g)^{g(h=\zeta)}$ si riduce a zero per tutti i valori di h, tranne per $h=z$, ossia la $D(g)^{g(z=\zeta)}$ non sarà zero per le sole condizioni accennate. Supposto che le ulteriori condizioni (a) del § 118 s'introducano in tutti i termini della $D(g)^{g(z=\zeta)}$ dati dallo sviluppo (d) del precedente paragrafo, il termine $D(g-z)^{g-z}(z)^{\zeta}$ non è annullato dalle dette condizioni, giacchè la $(z)^{\zeta}$ non è zero, nè la $D(g-z)^{g-z}$ può essere zero, non contenendo z nè nella serie delle basi, nè in quella degl'indici. Una incognita per lo meno comparendo della forma $\left(\frac{1}{0}\right)$ sarà avverato il sintomo dell'incompatibilità del sistema.

Finalmente se oltre le condizioni (a) del paragrafo precedente si stabiliscono le condizioni (c) dello stesso paragrafo, si ha $D(g)^{g}=0$ per le (a), e $D(g)^{g(h=\zeta)}=0$ per le (c) qualunque siasi il valore di h della serie g. Tutte le incognite si presentano costantemente $\left(\frac{0}{0}\right)$, nè potendo ridursi il valore $\left(\frac{0}{0}\right)$ a quantità nè finita, nè infinita, il sistema in tal caso è indeterminato. Omessa in fatti l'ultima equazione del sistema (S) a parametri costanti che è avverata, il sistema si riduce ad $n-1$ equazioni fra $n-1$ incognite coi 2.i membri zero. In tal caso $n-2$ incognite saranno date per un'altra qualunque che rimarrà affatto arbitraria. Siccome dietro ciò si potrà verificare il sistema non solo con un sistema di valori tutti zero delle incognite, ma con un numero arbitrario di sistemi, quali risultano da valori qualunque attribuiti all'incognita che rimane arbitraria, il sistema sarà indeterminato.

121. Se due basi qualunque h, p della serie g diventano eguali fra loro, per cui abbiansi fra gli elementi le n relazioni

$$(h)^z = (p)^z\,,\quad (h)^y = (p)^y\,,\quad (h)^x = (p)^x \ldots\ldots (h)^a = (p)^a\,,$$

il sistema sarà incompatibile, a meno che non sia contemporaneamente verificata la condizione $(h)^\zeta = (p)^\zeta$. Di fatto la $D(g)^g$ per le ammesse ipotesi sarà zero § 51, e ammettendo per maggior semplicità che le basi qualunque h, p si riducano alle due estreme y, z, la $D(g)^{g(h=\zeta)} = \pm D(g)^{\gamma-h}$, sviluppato il 2.° membro a seconda dell' indice ζ colla formola (β') del § 73, darà

$$D(g)^{g(h=\zeta)} = \pm\left\{D(g-z)^{g-h}(z)^\zeta - D(g-y)^{g-h}(y)^\zeta + \ldots\ldots \pm D(g-a)^{g-h}(a)^\zeta\right\}$$

ove avrà luogo il $+$ o il $-$ innanzi alla parentesi secondo che h nella serie g degl' indici occupa un posto dispari o pari. Tutte le alternanti

$$D(g-x)^{g-h}\,,\quad D(g-u)^{g-h} \ldots\ldots D(g-b)^{g-h}\,,\quad D(g-a)^{g-h}$$

saranno zero quando si fanno eguali fra loro le due basi y, z che entrano in ciascuna serie $g-x$, $g-u \ldots\ldots g-b$, $g-a$ delle loro basi. Perciò la precedente eguaglianza si ridurrà a

$$D(g)^{g(h=\zeta)} = \pm\left\{D(g-z)^{g-h}(z)^\zeta - D(g-y)^{g-h}(y)^\zeta\right\}.$$

Se inoltre nell' alternante $D(g-y)^{g-h}$ si pone la base y in luogo della sua eguale z, essa diventa $D(g-z)^{g-h}$, onde si ha

$$D(g)^{g(h=\zeta)} = \pm D(g-z)^{g-h}\left((z)^\zeta - (y)^\zeta\right).$$

Non divenendo zero questa espressione per alcun valore di h, le diverse incognite si presenteranno sotto la forma $\left(\frac{1}{0}\right)$. Il sistema sarà perciò incompatibile e cesserà di essere tale se si stabilisce la relazione $(z)^\zeta = (y)^\zeta$. La forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ che

assumono in tal caso le incognite non essendo riducibile a quantità nè finita, nè infinita, il sistema sarà indeterminato. Ciò in fatti risulta manifesto stante che l'ultima equazione del dato sistema divenendo identica colla penultima, il sistema è ridotto ad un numero $n-1$ di equazioni fra un numero n d'incognite che sappiamo essere indeterminato.

122. Se due indici si suppongono eguali fra loro, per es. $z=y$ onde abbiano luogo le n relazioni

$$(z)^z=(z)^y,\quad (y)^z=(y)^y,\quad (x)^z=(x)^y\ldots.(b)^z=(b)^y,\quad (a)^z=(a)^y$$

il sistema (S) sarà incompatibile, a meno che non si stabilisca la condizione $D(g)^{g(z=\zeta)}=0$. Supposto in fatti che g_1, g_2, $g_3\ldots.g_n$ rappresentino ciò che diventa la serie degli indici g quando si sostituisca rispettivamente alle lettere $z, y, x\ldots.b, a$ la ζ, le alternanti

$$D(g)^{g_1},\quad D(g)^{g_2},\quad D(g)^{g_3}\ldots.D(g)^{g_n}$$

saranno i valori che assume la $D(g)^{g(h=\zeta)}$ pei valori di $h=z, y, x\ldots.b, a$. Tutte le alternanti $D(g)^{g_3}$, $D(g)^{g_4}\ldots,D(g)^{g_n}$ diverranno zero quando si fanno eguali fra loro i due indici z, y che si trovano congiunti nelle serie g_3, $g_4\ldots.g_n$ de' loro indici § 56. Ma le due alternanti $D(g)^{g_1}$, $D(g)^{g_2}$ mantenendosi quantità finite quando si fanno eguali fra loro gli anzidetti indici che entrano disgiunti nelle g_1, g_2, mentre la $D(g)^g$ si annulla § 56, i valori delle incognite assumeranno la forma

$$(\zeta)^z=\left(\frac{1}{0}\right),\quad (\zeta)^y=\left(\frac{1}{0}\right),\quad (\zeta)^x=\left(\frac{0}{0}\right)\ldots.(\zeta)^a=\left(\frac{0}{0}\right);$$

ed il sistema perciò sarà incompatibile. Ma se si pone $z=y$ nella serie g_2, si ha $D(g)^{g_2}=-D(g)^{g_1}$. Posta dunque la semplice condizione $D(g)^{g_1}=D(g)^{g(z=\zeta)}=0$; tutte le incognite assumeranno la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Tale condizione essendo quella che riduce un'equazione del sistema, per es. l'ultima, ad essere una conseguenza delle altre, il sistema consterà di $n-1$ equazioni fra n incognite. Ma in forza delle fatte supposizioni essendo tutti eguali fra loro i coefficienti delle incognite $(\zeta)^x$, $(\zeta)^y$, si fonderanno queste in una sola $(\zeta)^x + (\zeta)^y = Z$. Comunque in tal caso il sistema somministrando valori finiti per le $n-1$ incognite $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b \ldots (\zeta)^x$, Z sarebbe rispetto a questo determinato, pure rimanendo sempre arbitraria una delle $(\zeta)^x$, $(\zeta)^y$ la cui somma costituisce la Z, il sistema sarà effettivamente indeterminato. Se si vuole verificare l'equazione $D(g)^{\xi(x=\zeta)} = 0$ col numero n di relazioni

$$(a)^\zeta = (b)^\zeta = (c)^\zeta = \ldots = (y)^\zeta = (z)^\zeta = 0,$$

il sistema in tal caso consterà di n equazioni fra le $n-1$ incognite $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b \ldots (\zeta)^x$, Z. Un tal sistema sarà bensì verificato con un solo sistema di valori tutti zero delle $n-1$ incognite stesse, ma la $Z = (\zeta)^x + (\zeta)^y = 0$ lascerà ancora indeterminata una delle due incognite $(\zeta)^x$, $(\zeta)^y$, e perciò anche in tal caso il sistema sarà indeterminato rispetto alle n incognite che si considerano. Le conseguenze di questo e del precedente paragrafo possono facilmente estendersi al caso in cui il numero di basi o d'indici che divengano eguali fra loro sia superiore a due.

123. Se fra i parametri del sistema (S) si stabiliscono le relazioni (a), (b) del § 90, il sistema sarà determinato od incompatibile secondo che n sarà pari o dispari; ed in questo secondo caso acciò il sistema possa cessare di essere incompatibile dovranno inoltre avverarsi le n condizioni

$$D(g)^{\xi(z=\zeta)} = 0, \quad D(g)^{\xi(y=\zeta)} = 0, \quad D(g)^{\xi(x=\zeta)} = 0 \ldots D(g)^{\xi(a=\zeta)} = 0 \qquad (m)$$

Di fatto i valori delle incognite $(\zeta)^x$, $(\zeta)^y$, $(\zeta)^z \ldots (\zeta)^b$, $(\zeta)^a$

desunte dall'equazione (e) del § 117 avranno per numeratori rispettivamente le alternanti

$$D(g)^{g(z=\zeta)},\ D(g)^{g(y=\zeta)},\ D(g)^{g(x=\zeta)},\ldots D(g)^{g(b=\zeta)},\ D(g)^{g(a=\zeta)}.$$

Ma per la formola (β') del § 73 e per la relazione $D(g)^{g(h=\zeta)} = \pm D(g)^{7-h}$ del § 112 si avrà

$$\begin{aligned}
(g)^{g(z=\zeta)} &= +\left\{D(g-z)^{g-z}(z)^{\zeta} - D(g-y)^{g-z}(y)^{\zeta} + D(g-x)^{g-z}(x)^{\zeta}\ldots \pm D(g-a)^{g+z}(a)^{\zeta}\right\}\\
(g)^{g(y=\zeta)} &= -\left\{D(g-z)^{g-y}(z)^{\zeta} - D(g-y)^{g-y}(y)^{\zeta} + D(g-x)^{g-y}(x)^{\zeta}\ldots \pm D(g-a)^{g-y}(a)^{\zeta}\right\}\\
(g)^{g(x=\zeta)} &= +\left\{D(g-z)^{g-x}(z)^{\zeta} + D(g-y)^{g-x}(y)^{\zeta} + D(g-x)^{g-x}(x)^{\zeta}\ldots \pm D(g-a)^{g-x}(a)^{\zeta}\right\}\\
&\vdots\\
(g)^{g(a=\zeta)} &= \pm\left\{D(g-z)^{g-a}(z)^{\zeta} - D(g-y)^{g+a}(y)^{\zeta} + D(g-x)^{g-a}(x)^{\zeta}\ldots \pm D(g-a)^{g+a}(a)^{\zeta}\right\}
\end{aligned} \qquad (H)$$

Suppongasi n dispari. Le alternanti

$$D(g-z)^{g-z},\ D(g-y)^{g-y},\ D(g-x)^{g-x}\ldots D(g-a)^{g-a},$$

che entrano rispettivamente nei numeratori in questione, essendo fra un numero pari di elementi non si annullano § 91 non ostante siano avverate le condizioni (a), (b) del § 90. Qualunque siano pertanto i valori delle altre alternanti che entrano nei 2.i membri delle (H), i valori delle incognite si presenteranno tutti sotto la forma $\left(\frac{1}{0}\right)$ annullandosi in essi il denominatore comune $D(g)^{g}$, ed il sistema (S) sarà perciò incompatibile. Potrà esso cessare di essere tale quando si introducano le nuove relazioni (m). Ma per mostrare che tali condizioni non possono ridursi a forme più semplici, si dovrà provare che nessuna delle alternanti dei 2.i membri delle (H) si riduce a zero per le ammesse condizioni. Di fatto considerata la $D(g-y)^{g-z}$ della 2.a delle (H), se si ammettessero le ulteriori relazioni date da

$$(z)^y=(y)^y,\ (z)^x=(y)^x,\ (z)^u=(y)^u \ldots (z)^t=(y)^t,\ (z)^s=(y)^s, \quad (c_1)$$

la $D(g-y)^{s-z}$ si cambierebbe in $D(g-z)^{s-z}$. Ma questa non si annulla, come si è detto, per le sole condizioni (a), (b) del § 90; a più forte ragione non potrà annullarsi la $D(g-y)^{s-z}$, non avendo luogo le relazioni (c_1) le quali limitano la generalità degli elementi $(z)^y$, $(z)^x \ldots (z)^s$ che entrano in essa. Parimente la $D(g-x)^{s-z}$ si cambia in $D(g-z)^{s-z}$ quando si stabiliscano le relazioni

$$(z)^y=(x)^y,\ (z)^x=(x)^x,\ (z)^u=(x)^u \ldots (z)^t=(x)^t,\ (z)^s=(x)^s, \quad (c_2),$$

e come non si annulla per le (c_2), non potrà annullarsi a più forte ragione se le (c_2) non si ammettano. Così la $D(g-u)^{s-z}$ della stessa 1.ª equazione si cambia in $D(g-z)^{s-z}$ col vincolare i suoi elementi alle relazioni

$$(z)^y=(u)^y,\ (z)^x=(u)^x,\ (z)^u=(u)^u \ldots (z)^s=(u)^s, \quad (c_3)$$

e perciò non potrà essere zero colle sole condizioni (a), (b) del § 90. Così progredendo sino all'ultima alternante $D(g-a)^{s-z}$ della stessa 1.ª equazione delle (H), si proverà che nessuna delle alternanti che entrano nel valore del numeratore $D(g)^{s(\omega-\zeta)}$ sarà ridotta a zero per le sole condizioni (a), (b) del § 90. Considerando ora le alternanti che entrano nel valore di $D(g)^{s(y-\zeta)}$ si osserverà che la $D(g-y)^{s-y}$ non si annulla. Ma la $D(g-z)^{s-y}$ si cambia in $D(g-y)^{s-y}$ collo stabilire le relazioni

$$(y)^x=(z)^x,\ (y)^x=(z)^x,\ (y)^u=(z)^u \ldots (y)^s=(z)^s, \quad (d_1):$$

la $D(g-x)^{s-y}$ si cambia pure in $D(g-y)^{s-y}$ collo stabilire le relazioni

$$(y)^x=(x)^x,\ (y)^x=(x)^x,\ (y)^u=(x)^u \ldots (y)^s=(x)^s, \quad (d_2)$$

e così dicasi delle altre, essendo manifesta la legge di queste relazioni. Onde si conchiuderà che nessuna delle alternanti che

entrano nel valore di $D(g)^{\varepsilon(y=\zeta)}$ si annulla per le sole condizioni (a), (b) del § 90.

Ripetuto lo stesso discorso sulle alternanti che compongono i restanti numeratori $D(g)^{\varepsilon(x=\zeta)}$, $D(g)^{\varepsilon(u=\zeta)} \ldots D(g)^{\varepsilon(a=\zeta)}$, si conchiuderà che nessuna delle alternanti che entrano nei 2.[i] membri delle (H) si annulla per le sole condizioni (a), (b) del § 90. Perchè dunque si annullino i numeratori suddetti non esistono altre più semplici relazioni che quelle date dalle equazioni (m).

Sia ora n pari. Negli sviluppi dei numeratori dati dalle (H) scompariranno rispettivamente le alternanti

$$D(g-z)^{\varepsilon-z}, \quad D(g-y)^{\varepsilon-y}, \quad D(g-x)^{\varepsilon-x} \ldots D(g-a)^{\varepsilon-a}$$

in forza delle (a), (b) del § 90, per essere fra un numero $n-1$ dispari di elementi, le altre alternanti

$$\begin{array}{l} D(g-y)^{\varepsilon-z}, \quad D(g-x)^{\varepsilon-z}, \quad D(g-u)^{\varepsilon-z} \ldots D(g-a)^{\varepsilon-z} \\ D(g-z)^{\varepsilon-y}, \quad D(g-x)^{\varepsilon-y}, \quad D(g-u)^{\varepsilon-y} \ldots D(g-a)^{\varepsilon-y} \\ \vdots \\ D(g-z)^{\varepsilon-a}, \quad D(g-y)^{\varepsilon-a}, \quad D(g-u)^{\varepsilon-a} \ldots D(g-b)^{\varepsilon-a} \end{array}$$

constano pure di un numero dispari di elementi. Sviluppata ciascuna di queste a seconda di un indice opportunamente scelto come si è fatto dei primi membri delle (H), le alternanti di cui consteranno gli sviluppi saranno fra un numero pari $= n-2$ di elementi. In ciascuno di questi sviluppi entrerà un'alternante, in cui la serie degl'indici sarà eguale alla serie delle basi, ossia un'alternante della forma $D(g_1)^{\varepsilon_1}$. Tali alternanti non saranno zero, non ostante che siano avverate le condizioni (a), (b) del § 90, per essere pari il numero dei loro elementi § 91. Si dimostrerà quindi che le altre alternanti di ciascuno sviluppo non sono zero seguendo lo stesso processo

che si è usato per provare che non erano zero le alternanti dei 2.i membri delle (H); così, per esempio, l'alternante $D(g-y)^{g-z}$ sviluppata per l'indice y darà

$$D(g-y)^{g-z}=\left\{\begin{array}{l} D(g-y-z)^{g-z-y}(z)^y-D(g-y-x)^{g-z-y}(x)^y \\ +D(g-y-u)^{g-z-y}(u)^y-\ldots\ldots\pm D(g-y-a)^{g-z-y}(a)^y \end{array}\right\}$$

ove la $D(g-y-z)^{g-z-y}$ che è della forma $D(g_1)^{g_1}$ essendo fra un numero pari di elementi non sarà zero, non ostante che in essa si verifichino le condizioni (a), (b) del § 90. Ora si proverà come si è fatto per le (H) che ammesse ulteriori relazioni, tutte le altre alternanti si riducono alla prima, e non possono quindi essere zero per le sole condizioni (a), (b) del § 90. Ne deriva pertanto che nel caso di n pari risultando $D(g)^g$ una quantità finita differente da zero e tutti i numeratori delle incognite parimente quantità finite differenti da zero, la (S) costituirà un sistema determinato.

124. Il sistema (S) in cui siano avverate le relazioni date al § 92 sarà, per n pari un sistema determinato, e per n dispari un sistema incompatibile, a meno che non si avverino anche le relazioni (m) del precedente paragrafo. Di fatto se nel valore dell'incognita generica dato dall'equazione (e) si sostituiscono alle basi della serie g le rispettive basi della serie G' che loro sono eguali, come si è fatto nelle (p) del § 92, si avrà

$$(\zeta)^h=\frac{D(g)^{g(h=\zeta)}}{D(g)^g}=\frac{D(G')^{g(h=\zeta)}}{D(G')^g}.$$

Ma essendo m il numero de' rientranti del gruppo (G'), sarà $n-m$ dispari o pari, secondo che n sarà paro-dispari, ovvero dispari o paro-pari. Si avrà dunque $D(G')^g=\pm D(G)^g$, ove varrà il segno $+$ ovvero il segno $-$ secondo che n sarà dispari o paro-pari o secondo che n sarà paro-dispari.

Siccome $D(G')^{g(h=\zeta)}$ non è che la $D(G')^g$ in cui all'indice h si sostituisca la ζ, si avrà pure

$$D(G')^{g(h=\zeta)} = \pm D(G)^{g(h=\zeta)}$$

valendo il $+$ o il $-$ a seconda degli accennati valori di n, si avrà quindi qualunque siasi n, $(\zeta)^h = \frac{D(G)^{g(h=\zeta)}}{D(G)^g}$

Se si sviluppa il numeratore a seconda dell'indice ζ per ciascun valore di h della serie g, si otterrà per risultato ciò che diventano i secondi membri delle (H) quando alle lettere piccole esprimenti le basi siansi sostituite le corrispondenti lettere grandi. Si conchiuderà che per n dispari annullandosi la $D(G)^g$ e non divenendo zero le

$$D(G-Z)^{g-z}, \quad D(G-Y)^{g-y} \ldots D(G-A)^{g-a}$$

i valori delle incognite si presenteranno tutti sotto la forma $\left(\frac{1}{0}\right)$ e perciò il sistema sarà incompatibile. E siccome collo stesso discorso si proverà che parimente le altre alternanti che entrano negli sviluppi dei numeratori non si annullano, le più semplici relazioni che dovranno aver luogo acciò possa cessare l'incompatibilità del sistema saranno quelle che risultano dall'eguagliare a zero tutti gli anzidetti numeratori, o, ciò che torna lo stesso, tali relazioni saranno quelle date dalle (m) del precedente paragrafo. Se n sarà pari si annulleranno bensì le $D(G-Z)^{g-z} \ldots D(G-A)^{g-a}$, ma si proverà parimente che non si annullano le altre alternanti; e siccome in tal caso la $D(G)^g$ non si annulla, si conchiuderà che il sistema è determinato.

125. Risulta dai due precedenti paragrafi che se nel sistema (S) si annullano tutti i coefficienti delle incognite che si trovano sulla diagonale che congiunge i termini $(a)^a(\zeta)^a$, $(z)^z(\zeta)^z$, ed assumono valori opposti tutti quelli

che trovansi ad eguale distanza dall'una e dall'altra parte della diagonale stessa, ovvero se si annullano tutti i coefficienti che trovansi sull'altra diagonale condotta dal termine $(a)^z(\zeta)^z$ al termine $(z)^e(\zeta)^e$, ed assumono valori opposti i coefficienti delle incognite che trovansi egualmente discosti dall'una e dall'altra parte di questa diagonale, il sistema sarà determinato od incompatibile secondo che n sarà pari o dispari, nè potrà cessare di essere incompatibile se non ammettendo le ulteriori relazioni date dalle (m) del § 123. Giova osservare che sussisteranno conseguenze analoghe qualora un dato sistema di equazioni siasi ridotto alla forma (S') del § 113 in luogo di essere ridotto alla forma (S) del § 112.

126. Se un proposto sistema di n^2 equazioni posto sotto la forma (S) è tale che insieme con esso sussiste il sistema invertito (S^i), le cui quantità abbiano le stesse significazioni di quelle che entrano in (S), dovranno essere adempite le n^2 relazioni

$$(z)^z = \frac{D(g-z)^{\varepsilon-z}}{D(g)^\varepsilon},\ (y)^z = -\frac{D(g-y)^{\varepsilon-z}}{D(g)^\varepsilon},\ (x)^z = \frac{D(g-x)^{\varepsilon-z}}{D(g)^\varepsilon} \cdots (a)^z = \pm\frac{D(g-a)^{\varepsilon-z}}{D(g)^\varepsilon}$$

$$(z)^y = -\frac{D(g-z)^{\varepsilon-y}}{D(g)^\varepsilon},\ (y)^y = \frac{D(g-y)^{\varepsilon-y}}{D(g)^\varepsilon},\ (x)^y = -\frac{D(g-x)^{\varepsilon-y}}{D(g)^\varepsilon} \cdots (a)^y = \pm\frac{D(g-a)^{\varepsilon-z}}{D(g)^\varepsilon}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (C)$$

$$(z)^e = \pm\frac{D(g-z)^{\varepsilon-e}}{D(g)^\varepsilon},\ (y)^e = \mp\frac{D(g-y)^{\varepsilon-e}}{D(g)^\varepsilon},\ (x)^e = \pm\frac{D(g-x)^{\varepsilon-e}}{D(g)^\varepsilon} \cdots (a)^e = \pm\frac{D(g-a)^{\varepsilon-e}}{D(g)^\varepsilon}$$

e viceversa quando saranno adempite queste relazioni (C), il sistema proposto sarà invertibile. Di fatto il sistema proposto sarà dato § 112 da

$$\Sigma(a)^\varepsilon(\zeta)^\varepsilon = (a)^\zeta,\ \Sigma(b)^\varepsilon(\zeta)^\varepsilon = (b)^\zeta \ldots \Sigma(p)^\varepsilon(\zeta)^\varepsilon = (p)^\zeta \ldots \Sigma(z)^\varepsilon(\zeta)^\varepsilon = (z)^\zeta \qquad (S)$$

e siccome deve per ipotesi sussistere anche il suo invertito, si avrà

$$\Sigma(g)^a(g)^\zeta = (\zeta)^a\,,\quad \Sigma(g)^b(g)^\zeta = (\zeta)^b \ldots \Sigma(g)^p(g)^\zeta = (\zeta)^p \ldots \Sigma(g)^z(g)^\zeta = (\zeta)^z \qquad (S')$$

Ma dall' equazione (e) del § 117 si ha

$$(\zeta)^a = \frac{D(g)^{g(a=\zeta)}}{D(g)^g}\,,\quad (\zeta)^b = \frac{D(g)^{g(b=\zeta)}}{D(g)^g} \ldots (\zeta)^z = \frac{D(g)^{g(z=\zeta)}}{D(g)^g} \quad (e),$$

onde posti questi valori nei secondi membri della (S'), sviluppate le alternanti

$$D(g)^{g(a=\zeta)}\,,\quad D(g)^{g(b=\zeta)} \ldots D(g)^{g(z=\zeta)}$$

a seconda dell' indice ζ, e paragonati i coefficienti delle $(a)^\zeta$, $(b)^\zeta$, $(c)^\zeta \ldots (z)^\zeta$, ciascuna delle equazioni (S') fornirà un numero n di relazioni fra gli elementi del proposto sistema (S), e siccome è pure n il numero delle equazioni (S'), così si avranno n^2 relazioni quali vengono date dalle (C).

Parimente se in un sistema proposto sono verificate le relazioni (C), il sistema sarà invertibile, giacchè se nell' ultima delle equazioni (e) si sviluppa il numeratore a seconda dell' indice ζ si ha

$$(\zeta)^z = \frac{D(g-z)^{g-z}}{D(g)^g}(z)^\zeta - \frac{D(g-y)^{g-z}}{D(g)^g}(y)^\zeta + \ldots \pm \frac{D(g-a)^{g-z}}{D(g)^g}(a)^\zeta$$

Ma avuto riguardo alla prima linea orizzontale delle relazioni (C) si avrà

$$(\zeta)^z = (z)^z(z)^\zeta + (y)^z(y)^\zeta + (x)^z(x)^\zeta + \ldots + (a)^z(a)^\zeta = \Sigma(g)^z(g)^\zeta$$

la quale è l' ultima delle equazioni (S'). Eseguiti gli sviluppi nei numeratori delle altre equazioni (e), ed avuto riguardo alle relazioni (C) che per ipotesi devono essere verificate, si otterranno tutte le altre equazioni delle (S'), e perciò il sistema proposto sarà invertibile.

127. Supposte avverate le relazioni (C), e perciò invertibile il sistema, dovranno aver luogo le relazioni

$$\Sigma^2(g)^a = \Sigma^2(g)^b = \Sigma^2(g)^c = \cdots = \Sigma^2(g)^z = 1 \qquad (Q)$$

$$\Sigma^2(a)^\beta = \Sigma^2(b)^\beta = \Sigma^2(c)^\beta = \cdots = \Sigma^2(z)^\beta = 1 \qquad (Q')$$

ed essere verificate le $n(n-1)$ equazioni seguenti

$$\left.\begin{array}{r}
\Sigma(g)^a(g)^b = \Sigma(g)^a(g)^c = \Sigma(g)^a(g)^d = \cdots = \Sigma(g)^a(g)^z = 0 \\
\Sigma(g)^b(g)^c = \Sigma(g)^b(g)^d = \cdots = \Sigma(g)^b(g)^z = 0 \\
\Sigma(g)^c(g)^d = \cdots = \Sigma(g)^c(g)^z = 0 \\
\vdots \\
\Sigma(g)^y(g)^z = 0
\end{array}\right\} (Z)$$

$$\left.\begin{array}{r}
\Sigma(a)^\beta(b)^\beta = \Sigma(a)^\beta(c)^\beta = \Sigma(a)^\beta(d)^\beta = \cdots = \Sigma(d)^\beta(z)^\beta = 0 \\
\Sigma(b)^\beta(c)^\beta = \Sigma(b)^\beta(d)^\beta = \cdots = \Sigma(b)^\beta(z)^\beta = 0 \\
\Sigma(c)^\beta(a)^\beta = \cdots = \Sigma(c)^\beta(z)^\beta = 0 \\
\vdots \\
\Sigma(y)^\beta(z)^\beta = 0
\end{array}\right\} (Z')$$

ove il simbolo Σ ha la solita significazione adottata indietro, e la Σ^2 delle (Q), (Z) indica la somma dei quadrati dei termini che nascono dallo sviluppo delle Σ, e le (Q'), (Z') sono le invertite delle (Q), (Z). Di fatto se le equazioni della prima linea verticale delle (C) si moltiplicano rispettivamente per

$$(z)^z,\ (z)^y,\ (z)^x \ldots (z)^b,\ (z)^a$$

indi si sommino: quelle della seconda linea verticale si moltiplicano rispettivamente per

$$(y)^z,\ (y)^y,\ (y)^x \ldots (y)^b,\ (y)^a$$

e si sommino: quelle della terza rispettivamente per

$$(x)^z,\ (x)^y,\ (x)^x \ldots (x)^b,\ (x)^a$$

e si sommino, e così di seguito, per cui quelle dell'ultima linea verticale verranno rispettivamente moltiplicate per

$$(a)^z,\ (a)^y,\ (a)^x \ldots (a)^b,\ (a)^a,$$

si vedrà che i primi membri costituiranno somme dei quadrati di elementi, e che i secondi membri avranno per denominatore comune $D(g)^g$, e che la somma dei numeratori sarà lo sviluppo della stessa $D(g)^g$ a seconda della base z per la prima somma, a seconda della base y per la seconda, e così di seguito, per cui tutti i secondi membri si ridurranno all'unità e si otterranno le relazioni (Q'). Se in vece si moltiplicano le equazioni della 1.ª linea orizzontale delle (C) rispettivamente per

$$(z)^z,\ (y)^z,\ (x)^z \ldots (b)^z,\ (a)^z$$

e si sommino: quelle della seconda linea orizzontale rispettivamente per

$$(z)^y,\ (y)^y,\ (x)^y \ldots (b)^y,\ (a)^y$$

e si sommino, e così di seguito, osservando quindi che le somme dei numeratori sono gli sviluppi della $D(g)^g$ a seconda degl'indici $z, y, x \ldots b, a$ si otterranno le relazioni (Q).

Parimente se le equazioni della prima linea orizzontale si moltiplicano rispettivamente per

$$(z)^y,\ (y)^y,\ (x)^y \ldots (b)^y,\ (a)^y$$

e si sommano, si ottiene

$$\Sigma(g)^y(g)^z = \frac{1}{D(g)^g}\left\{D(g-z)^{g-2}(z)^y - D(g-y)^{g-2}(y)^y + D(g-x)^{g-2}(x)^y + \ldots \pm D(g-a)^{g-2}(a)^y\right\}$$

Ma il polinomio del 2.° membro è zero per la formola (j) del § 74 in cui siasi fatto $k = y$, vale a dire il detto polinomio è lo sviluppo della $D(g)^z$ a seconda dello stesso indice z in cui siasi poscia fatto $z = y$, che si riduce a zero per essersi posti eguali fra loro due indici. Sarà perciò $\Sigma(g)^y(g)^z = 0$.

Parimente moltiplicate le equazioni della 1.ª linea orizzontale rispettivamente per

$$(z)^x,\ (y)^x,\ (x)^x \ldots\ldots (b)^x,\ (a)^x$$

che sono i primi membri della terza linea orizzontale, ovvero rispettivamente per

$$(z)^u,\ (y)^u,\ (x)^u \ldots\ldots (b)^u,\ (a)^u$$

che sono i primi membri della quarta linea orizzontale e così di seguito sino a moltiplicare le stesse equazioni per

$$(z)^b,\ (y)^b,\ (x)^b \ldots\ldots (b)^b,\ (a)^b$$

$$(z)^a,\ (y)^a,\ (x)^a \ldots\ldots (b)^a,\ (a)^a$$

che sono i primi membri della penultima ed ultima linea orizzontale delle (C), sommate ed avuto riguardo sempre all'equazione citata (j), si avranno rispettivamente unite alla prima

$$\Sigma(g)^y(g)^z = \Sigma(g)^x(g)^z = \Sigma(g)^u(g)^z = \cdots = \Sigma(g)^b(g)^z = \Sigma(g)^a(g)^z = 0$$

la quale è l'ultima linea verticale delle (Z).

Se ora si parte dalle equazioni della seconda linea orizzontale moltiplicate rispettivamente pei primi membri delle equazioni della 3.ª, 4.ª ...., ultima linea orizzontale e così di seguito, si ottengono tutte le relazioni (Z).

Per ottenere le relazioni (Z') si dovranno considerare le equazioni della prima linea verticale delle (C), moltiplicarle rispettivamente pei primi membri della 2.ª, 3.ª ....,

ultima linea verticale e sommarle, e così progredendo, avuto quì riguardo all'equazione (c) del § 74 in luogo della (j), si otterranno tutte le relazioni (Z').

128. Quando il sistema è invertibile si avrà fra le

$$(\zeta)^a,\ (\zeta)^b,\ (\zeta)^c \ldots\ldots (\zeta)^y,\ (\zeta)^z$$

e le $\quad (a)^\zeta,\ (b)^\zeta,\ (c)^\zeta \ldots\ldots (y)^\zeta,\ (z)^\zeta$

la relazione $\quad \Sigma^2(\zeta)^g = \Sigma^2(g)^\zeta, \qquad (I).$

Di fatto partendo dalle equazioni (e) del § 126, sviluppati i numeratori dei secondi membri a seconda dell'indice ζ, fatti i quadrati e sommati, si avrà

$$\left(D(g)^g\right)^2\Sigma^2(\zeta)^g =$$

$$\begin{aligned}
= &\left\{ D(g-z)^{g-z}(z)^\zeta - D(g-y)^{g-z}(y)^\zeta + D(g-x)^{g-z}(x)^\zeta \ldots\ldots \pm D(g-a)^{g-z}(a)^\zeta \right\}^2 \\
+ &\left\{ -D(g-z)^{g-y}(z)^\zeta + D(g-y)^{g-y}(y)^\zeta - D(g-x)^{g-y}(x)^\zeta \ldots\ldots \pm D(g-a)^{g-y}(a)^\zeta \right\}^2 \\
+ &\left\{ D(g-z)^{g-x}(z)^\zeta - D(g-y)^{g-x}(y)^\zeta + D(g-x)^{g-x}(x)^\zeta \ldots\ldots \pm D(g-a)^{g-x}(a)^\zeta \right\}^2 \\
&\vdots \\
+ &\left\{ \pm D(g-z)^{g-a}(z)^\zeta \mp D(g-y)^{g-a}(y)^\zeta \pm D(g-x)^{g-a}(x)^\zeta \ldots\ldots \pm D(g-a)^{g-a}(a)^\zeta \right\}^2
\end{aligned}$$

Posti in luogo delle alternanti del 2.° membro i loro valori dati dalle (C) del § 126, si otterrà

$$\begin{aligned}
\Sigma^2(\zeta)^g = &\left\{ (z)^z(z)^\zeta + (y)^z(y)^\zeta + (x)^z(x)^\zeta + \ldots\ldots + (a)^z(a)^\zeta \right\}^2 \\
+ &\left\{ (z)^y(z)^\zeta + (y)^y(y)^\zeta + (x)^y(x)^\zeta + \ldots\ldots + (a)^y(a)^\zeta \right\}^2 \\
+ &\left\{ (z)^x(z)^\zeta + (y)^x(y)^\zeta + (x)^x(x)^\zeta + \ldots\ldots + (a)^x(a)^\zeta \right\}^2 \\
&\vdots \\
+ &\left\{ (z)^a(z)^\zeta + (y)^a(y)^\zeta + (x)^a(x)^\zeta + \ldots\ldots + (a)^a(a)^\zeta \right\}^2
\end{aligned}$$

Eseguiti i quadrati ed avuto riguardo alle relazioni (Q') e (Z') del precedente paragrafo, si ottiene $\Sigma^2(\zeta)^g = \Sigma^2(g)^{\zeta}$.

129. Se ai coefficienti del sistema (S) supposto invertibile si sostituiscono i valori dati dalle (C) del § 126, la forma che il sistema assume è tale che si può passare da una ad altra linea orizzontale col far variare la base, e dall'una ad altra linea verticale col far variare l'indice. Così se nella serie

$$+\frac{D(g-z)^{g-z}}{D(g)^g},\quad -\frac{D(g-z)^{g-y}}{D(g)^g},\quad +\frac{D(g-z)^{g-x}}{D(g)^g}\cdots\pm\frac{D(g-z)^{g-\alpha}}{D(g)^g},$$

che dopo l'accennata sostituzione costituirà la serie dei coefficienti dell'ultima linea orizzontale letta da destra a sinistra, si pone nell'espressione $g-z$ delle basi la y in luogo di z, si ottiene la penultima linea orizzontale. Parimente se nella serie de' coefficienti che costituirà l'ultima linea verticale del sistema si pone nell'espressione $g-z$ degli indici la y in luogo di z, si ottiene la penultima linea verticale. Vale lo stesso discorso rispetto a tutte le altre linee orizzontali e verticali. Queste forme particolari sono, non altrimenti che le stabilite relazioni fra i parametri, necessarie conseguenze dell'essere il sistema invertibile. Le $n(n-1)$ relazioni date dalle (Z), (Z') danno fra gli n^2 parametri del sistema un numero $n(n-1)$ di essi in funzione degli altri n. Quindi gli n parametri rimasti arbitrarj si potranno supporre funzioni di altre n arbitrarie α, β, γ.... Supposta fatta la sostituzione di queste funzioni nei coefficienti del sistema (S) ridotto alla forma in questione, dovendo conservarsi la proprietà di poter passare da una ad altra linea orizzontale col far variare le basi e da una ad altra linea verticale col far variare gl'indici destinati a rappresentare funzioni, il sistema (S) sarà riducibile alla forma

$$
\begin{array}{l}
{}_1(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma\ldots)(\zeta)^a+\phi_2(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma\ldots)(\zeta)^b\ldots+\phi_n(\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma\ldots)(\zeta)^z=(a)^\zeta \\
{}_1(\alpha'\,,\ \beta'\,,\ \gamma'\ldots)(\zeta)^a+\phi_2(\alpha'\,,\ \beta'\,,\ \gamma'\ldots)(\zeta)^b\ldots+\phi_n(\alpha'\,,\ \beta'\,,\ \gamma'\ldots)(\zeta)^z=(b)^\zeta \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\

altre tre, i quattro parametri risulteranno funzioni non già di due arbitrarie, ma di una sola. In questa ipotesi in fatti il sistema

$$(a)^a(\zeta)^a + (a)^b(\zeta)^b = (a)^\zeta, \quad (b)^a(\zeta)^a + (b)^b(\zeta)^b = (b)^\zeta,$$

ove le $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b$ sono le coordinate rispetto ad un sistema di assi e le $(a)^\zeta$, $(b)^\zeta$ quelle rispetto ad un altro sistema coll'origine comune ed i coefficienti rappresentano i soliti coseni, si ridurrà alla forma

$$\phi(\alpha)(\zeta)^a + \phi_2(\alpha)(\zeta)^b = (a)^\zeta, \quad \phi_1(\alpha')(\zeta)^a + \phi_2(\alpha')(\zeta)^b = (b)^\zeta$$

analoga alla (F), ove α rappresenta l'angolo che l'asse della $(\zeta)^a$ fa con quello della $(a)^\zeta$ essendo $\alpha' = \alpha - \frac{\pi}{2}$ $\phi_1 = cos$, $\phi_2 = sin$.

Nel caso del sistema di tre equazioni contenenti le relazioni fra le coordinate di un punto nello spazio rispetto a tre assi ortogonali e le coordinate dello stesso riguardo ad altri assi coll'origine comune sarà $n = 3$ e parimente sarà 3 il numero delle arbitrarie che rimarranno nel sistema. Il sistema si ridurrà della forma

$$\phi_1(\alpha, \beta, \gamma)(\zeta)^a + \phi_2(\alpha, \beta, \gamma)(\zeta)^b + \phi_3(\alpha, \beta, \gamma)(\zeta)^c = (a)^\zeta$$

$$\phi_1(\alpha', \beta', \gamma')(\zeta)^a + \phi_2(\alpha', \beta', \gamma')(\zeta)^b + \phi_3(\alpha', \beta', \gamma'))(\zeta)^c = (b)^\zeta$$

$$\phi_1(\alpha'', \beta'', \gamma'')(\zeta)^a + \phi_2(\alpha'', \beta'', \gamma'')(\zeta)^b + \phi_3(\alpha'', \beta'', \gamma'')(\zeta)^c = (c)^\zeta$$

analoga alla forma (F), ove chiamato β l'angolo fatto dai due piani delle $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b$ con $(a)^\zeta$, $(b)^\zeta$, ed α, γ gli angoli che l'intersezione degli anzidetti piani fa coll'asse delle $(\zeta)^a$ e delle $(a)^\zeta$ sarà

$$\phi_1(\alpha, \beta, \gamma) = sin\,\alpha\, cos\,\beta\, sin\,\gamma + cos\,\alpha\, cos\,\gamma$$

$$\phi_2(\alpha, \beta, \gamma) = sin\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,\gamma - cos\,\alpha\, sin\,\gamma$$

$$\phi_3(\alpha, \beta, \gamma) = sin\,\alpha\, sin\,\beta.$$

i tre gruppi (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ essendo dati rispettivamente da

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad \left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta, \gamma\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}, \gamma\right).$$

131. Sia proposto un sistema di ν equazioni fra ν incognite $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b$, $(\zeta)^c \ldots (\zeta)^t$ della forma

$$\begin{aligned}
&\Sigma(g^{a'} g^a)(\zeta)^a + \Sigma(g^{b'} g^a)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^{t'} g^a)(\zeta)^t = \Sigma(g^\zeta g^a) \\
&\Sigma(g^{a'} g^b)(\zeta)^a + \Sigma(g^{b'} g^b)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^{t'} g^b)(\zeta)^t = \Sigma(g^\zeta g^b) \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (M) \\
&\Sigma(g^{a'} g^t)(\zeta)^a + \Sigma(g^{b'} g^t)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^{t'} g^t)(\zeta)^t = \Sigma(g^\zeta g^t)
\end{aligned}$$

ove, supposto $n > \nu$, la g rappresenta la solita serie delle n lettere $a, b, c \ldots t \ldots x, y, z$, ed ove una qualunque Σ relativa a due lettere omologhe m, m' è derivata dall'espressione generica

$$\Sigma(g^{m'} g^m) = \left\{ \begin{array}{l} (a)^{m'}(a)^m + (b)^{m'}(b)^m + (c)^{m'}(c)^m + \cdots\cdots \\ \cdots + (t)^{m'}(t)^m + \cdots + (y)^{m'}(y)^m + (z)^{m'}(z)^m \end{array} \right\}$$

Un'incognita qualunque $(\zeta)^p$ del sistema (M) sarà data dall'espressione

$$(\zeta)^p = \frac{D\{\Sigma(g^{a'} g^a)\Sigma(g^{b'} g^b) \ldots \Sigma(g^{t'} g^t)\}^{(p=\zeta)}}{D\{\Sigma(g^{a'} g^a)\Sigma(g^{b'} g^b) \ldots \Sigma(g^{t'} g^t)\}} \qquad (p)$$

in cui considerata la g come costante, il simbolo D indica l'alternante sia rispetto alla serie delle ν lettere esplicite $a, b, c \ldots t$, sia rispetto alle omologhe $a', b', c' \ldots t'$, ed ove ad operazione eseguita si dovrà nel numeratore sostituire la ζ alla p.

Di fatto supposto che la serie $g^a, g^b \ldots g^t$ che nei parametri del sistema (M) entra sotto le Σ, sia riguardata come una serie di ν basi che indichiamo ancora con $a, b, c \ldots t$, e le diverse Σ si riguardino come esprimenti funzioni di queste basi, il sistema (M) è della forma

$$\begin{aligned}
&\phi_1(a)(\zeta)^a + \phi_2(a)(\zeta)^b + \cdots\cdots + \phi_\nu(a)(\zeta)^t = \phi(a)\\
&\phi_1(b)(\zeta)^a + \phi_2(b)(\zeta)^b + \cdots\cdots + \phi_\nu(b)(\zeta)^t = \phi(b)\\
&\qquad\vdots\\
&\phi_1(t)(\zeta)^a + \phi_2(t)(\zeta)^b + \cdots\cdots + \phi_\nu(t)(\zeta)^t = \phi(t),
\end{aligned}$$

le $\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_\nu$ essendo simboli di funzioni non altrimenti che nelle espressioni $(m)^a, (m)^b \ldots (m)^t$, gl'indici sono destinati a rappresentar diverse funzioni della base generica m. Se si adotta di rappresentare anche le $\phi(a), \phi(b) \ldots \phi(t)$ dei 2.[1] membri colle espressioni analoghe $(a)^\zeta, (b)^\zeta \ldots (t)^\zeta$, si vedrà manifesta la coincidenza del sistema proposto col sistema (S) del § 112 ove la serie delle basi e degl'indici venga limitata alle sole ν lettere $a, b, c \ldots t$. Indicando con γ una tal serie di lettere, l'incognita generica $(\zeta)^p$ sarà data dall'espressione

$$(\zeta)^p = \frac{D(\gamma)^{\gamma(p=\zeta)}}{D(\gamma)^\gamma} \qquad (e).$$

Ma il gruppo fondamentale $(\gamma)^\gamma$ rappresenta l'espressione

$$\phi_1(a)\,\phi_2(b)\,\phi_3(c) \ldots \phi_\nu(t),$$

perciò

$$(\gamma)^\gamma = \Sigma(g^{a'} g^a)\,\Sigma(g^{b'} g^b)\,\Sigma(g^{c'} g^c) \ldots \Sigma(g^{t'} g^t),$$

e quindi sostituito un tal valore nella (e), si ottiene la enunciata espressione (p). Siccome poi l'alternante D

nella (e) può dietro il § 56 riferirsi tanto alla serie delle basi che a quella degl' indici, e siccome gl' indici esprimono la variabilità dovuta alla serie $a', b' \ldots . t'$, così l' alternante per gl' indici nella (e) sarà equivalente all' alternante rispetto alla serie $a', b', c' \ldots . t'$ nell' espressione (p). Il valore della $(\zeta)^p$ potrà facilmente ottenersi dallo sviluppo della simbolica $D(\gamma)^7$, ottenuto il quale, si passerà alla $D(\gamma)^{7(p=\zeta)}$, indi si sostituiranno ai diversi elementi che ne nascono le loro espressioni effettive date per le Σ. Si potrà, se si vuole, eseguire l' alternante immediatamente sull' espressione effettiva data dalla (p) sia rispetto alla serie $a, b, c \ldots . t$, sia rispetto alla $a', b', c' \ldots . t'$, indi porre nell' espressione del numeratore la ζ in luogo della p che rappresenta una lettera qualunque delle serie $a, b, c \ldots . t$.

132. Quando nel sistema (S) si suppongono zero tutti gli elementi affetti dagl' indici della serie g incominciando dalla $(\nu + 1)^{\text{esima}}$ lettera sino alla n^{esima}, il sistema di n equazioni contiene soltanto un numero $\nu < n$ d' incognite. Non potendosi dietro ciò che si è detto al § 120 trovare un sistema unico e finito d' incognite che completamente soddisfi al sistema di n equazioni, si ha ricorso in tal caso al sistema più probabile d' incognite che non soddisfacendo ad esso completamente se ne discosti il menomo possibile. Una lieve attenzione alla forma che assumono in tal caso le equazioni dei minimi quadrati persuade tosto che le ν equazioni da cui dipende il sistema più probabile delle ν incognite che si cercano possono ridursi alla forma

$$\begin{aligned}
&\Sigma(g^a g^a)(\zeta)^a + \Sigma(g^b g^a)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^t g^a)(\zeta)^t = \Sigma(g^\zeta g^a) \\
&\Sigma(g^a g^b)(\zeta)^a + \Sigma(g^b g^b)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^t g^b)(\zeta)^t = \Sigma(g^\zeta g^b) \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (N) \\
&\Sigma(g^a g^t)(\zeta)^a + \Sigma(g^b g^t)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^t g^t)(\zeta)^t = \Sigma(g^\zeta g^t)
\end{aligned}$$

ove g indica la serie delle n lettere $a, b, c \ldots t \ldots x, y, z$ a cui è riferibile il simbolo Σ, e le $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b \ldots (\zeta)^t$ sono le ν incognite da determinarsi. Ma il sistema (M) del paragrafo precedente si cambia in questo (N) quando si supponga, come caso particolare, che la serie $a', b' \ldots t'$ sia identica colla serie $a, b, c \ldots t$. Ne deriva che l'incognita generica $(\zeta)^p$ che sarebbe fornita dal sistema (N) sarà data dalla stessa espressione (p) dell'antecedente paragrafo in cui ad operazioni eseguite si levino gli apici alle $a', b', c' \ldots t'$. Il valore pertanto di un'incognita generica $(\zeta)^p$ del sistema più probabile di valori che soddisfa al proposto sistema (S) di n equazioni ridotto a non contenere che un numero $\nu < n$ d'incognite sarà dato dall'espressione (p) ove eseguite le alternanti indicate, posto $p = \zeta$ nei gruppi del numeratore, sviluppate le Σ e soppressi gli apici apposti alle $a', b' \ldots t'$, si sostituiscano agli elementi che il risultato contiene i parametri del proposto sistema.

133. Ritorniamo al caso generale in cui è data una funzione qualunque di un numero n di basi $a, b, c \ldots y, z$ destinata a subire l'operazione D. Si è veduto che tutte le altre quantità che possono entrare nella funzione erano da considerarsi come costanti, dovendo occupare sempre lo stesso posto ne' gruppi risultanti dalle n quantità che si considerano come variabili di posizione. Suppongasi ora che la proposta funzione oltre il sistema $a, b, c \ldots z$ contenga un altro sistema di ν basi $a', b', c' \ldots t'$ ove il numero ν sarà in generale diverso da n. Ritenuto che g esprima la prima serie, si rappresenti la seconda con λ. Una funzione qualunque dei due sistemi verrà espressa con $f(g, \lambda)$. Si diranno indipendenti i due sistemi di basi g, λ quando le alternazioni da eseguirsi dovranno intendersi fatte o fra le basi g o fra le basi λ, ma non fra le basi di

un sistema con quelle dell'altro. S'indichi con $D_g f(g, \lambda)$ l'alternante parziale della $f(g, \lambda)$, considerando la serie g come variabile e costante λ, e con $D_\lambda f(g, \lambda)$ l'alternante parziale della stessa funzione, considerando in vece come costante la serie g e variabile la serie λ. In luogo della serie $a', b', c', d', e', f' \ldots\ldots t' \ldots\ldots x', y', z'$ useremo per comodo di scrittura la serie delle lettere greche ordinate come segue $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi \ldots\ldots \tau \ldots\ldots \xi, \psi, \zeta$, intendendo che queste equivalgono alle precedenti. Si è veduto che una qualunque funzione soggetta all'operazione D_g veniva rappresentata simbolicamente con

$$D\left\{(a)^a (b)^b \ldots\ldots (z)^z\right\} = D(g)^g$$

in quanto era inutile di esprimere nella forma simbolica esplicitamente le costanti non soggette all'alternazione. Nulla però impedisce che siano pur esse espresse col porre

$$f(g, \lambda) = (a)^a (b)^b \ldots\ldots (z)^z (\alpha)^\alpha (\beta)^\beta \ldots\ldots (\zeta)^\zeta = (g)^g (\lambda)^\lambda ,$$

avvertendo solo che pigliando della $f(g, \lambda)$ l'alternante parziale D_g, potrà sopprimersi il simbolo $(\lambda)^\lambda$, ovvero se esso vuolsi ritenere, dovrà considerarsi come una costante applicata al sistema di basi che si considera ed anche cavarsi fuori dal segno D_g, non influendo per nulla alla formazione dei gruppi nati dall'operazione D_g. Si avrà cioè

$$D_g f(g, \lambda) = D_g\left\{(g)^g (\lambda)^\lambda\right\} = (\lambda)^\lambda D_g (g)^g \qquad (a)$$

Sviluppata la $D_g(g)^g$ ed applicato a ciascun gruppo il termine costante $(\lambda)^\lambda$, si passerà dai gruppi simbolici ottenuti ai gruppi effettivi corrispondenti alla $f(g, \lambda)$, nella stessa guisa che si è praticato nei precedenti paragrafi in cui la stessa $f(g, \lambda)$ veniva rappresentata dal semplice simbolo $(g)^g$. Se supponiamo eseguita sulla $f(g, \lambda)$ l'alternante

altre tre, i quattro parametri risulteranno funzioni non già di due arbitrarie, ma di una sola. In questa ipotesi in fatti il sistema

$$(a)^a(\zeta)^a + (a)^b(\zeta)^b = (a)^\zeta\,, \qquad (b)^a(\zeta)^a + (b)^b(\zeta)^b = (b)^\zeta\,,$$

ove le $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b$ sono le coordinate rispetto ad un sistema di assi e le $(a)^\zeta$, $(b)^\zeta$ quelle rispetto ad un altro sistema coll'origine comune ed i coefficienti rappresentano i soliti coseni, si ridurrà alla forma

$$\phi(\alpha)(\zeta)^a + \phi_2(\alpha)(\zeta)^b = (a)^\zeta\,, \quad \phi_1(\alpha')(\zeta)^a + \phi_2(\alpha')(\zeta)^b = (b)^\zeta$$

analoga alla (F), ove α rappresenta l'angolo che l'asse della $(\zeta)^a$ fa con quello della $(a)^\zeta$ essendo $\alpha' = \alpha - \frac{\pi}{2}$ $\phi_1 = cos$, $\phi_2 = sin$.

Nel caso del sistema di tre equazioni contenenti le relazioni fra le coordinate di un punto nello spazio rispetto a tre assi ortogonali e le coordinate dello stesso riguardo ad altri assi coll'origine comune sarà $n = 3$ e parimente sarà 3 il numero delle arbitrarie che rimarranno nel sistema. Il sistema si ridurrà della forma

$$\phi_1(\alpha, \beta, \gamma)(\zeta)^a + \phi_2(\alpha, \beta, \gamma)(\zeta)^b + \phi_3(\alpha, \beta, \gamma)(\zeta)^c = (a)^\zeta$$

$$\phi_1(\alpha', \beta', \gamma')(\zeta)^a + \phi_2(\alpha', \beta', \gamma')(\zeta)^b + \phi_3(\alpha', \beta', \gamma'))(\zeta)^c = (b)^\zeta$$

$$\phi_1(\alpha'', \beta'', \gamma'')(\zeta)^a + \phi_2(\alpha'', \beta'', \gamma'')(\zeta)^b + \phi_3(\alpha'', \beta'', \gamma'')(\zeta)^c = (c)^\zeta$$

analoga alla forma (F), ove chiamato β l'angolo fatto dai due piani delle $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b$ con $(a)^\zeta$, $(b)^\zeta$, ed α, γ gli angoli che l'intersezione degli anzidetti piani fa coll'asse delle $(\zeta)^a$ e delle $(a)^\zeta$ sarà

$$\phi_1(\alpha, \beta, \gamma) = sin\,\alpha\, cos\,\beta\, sin\,\gamma + cos\,\alpha\, cos\,\gamma$$

$$\phi_2(\alpha, \beta, \gamma) = sin\,\alpha\, cos\,\beta\, cos\,\gamma - cos\,\alpha\, sin\,\gamma$$

$$\phi_3(\alpha, \beta, \gamma) = sin\,\alpha\, sin\,\beta.$$

i tre gruppi (α, β, γ); $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ essendo dati rispettivamente da

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad \left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta, \gamma\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}, \gamma\right).$$

131. Sia proposto un sistema di ν equazioni fra ν incognite $(\zeta)^a$, $(\zeta)^b$, $(\zeta)^c \ldots (\zeta)^t$ della forma

$$\begin{aligned}
&\Sigma(g^{a'} g^a)(\zeta)^a + \Sigma(g^{b'} g^a)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^{t'} g^a)(\zeta)^t = \Sigma(g^{\zeta} g^a) \\
&\Sigma(g^{a'} g^b)(\zeta)^a + \Sigma(g^{b'} g^b)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^{t'} g^b)(\zeta)^t = \Sigma(g^{\zeta} g^b) \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (M) \\
&\Sigma(g^{a'} g^t)(\zeta)^a + \Sigma(g^{b'} g^t)(\zeta)^b + \cdots + \Sigma(g^{t'} g^t)(\zeta)^t = \Sigma(g^{\zeta} g^t)
\end{aligned}$$

ove, supposto $n > \nu$, la g rappresenta la solita serie delle n lettere $a, b, c \ldots t \ldots x, y, z$, ed ove una qualunque Σ relativa a due lettere omologhe m, m' è derivata dall'espressione generica

$$\Sigma(g^{m'} g^m) = \left\{ \begin{array}{l} (a)^{m'}(a)^m + (b)^{m'}(b)^m + (c)^{m'}(c)^m + \cdots\cdots \\ \cdots + (t)^{m'}(t)^m + \cdots + (y)^{m'}(y)^m + (z)^{m'}(z)^m \end{array} \right\}$$

Un'incognita qualunque $(\zeta)^p$ del sistema (M) sarà data dall'espressione

$$(\zeta)^p = \frac{D\{\Sigma(g^{a'} g^a)\Sigma(g^{b'} g^b) \ldots \Sigma(g^{t'} g^t)\}^{(p=\zeta)}}{D\{\Sigma(g^{a'} g^a)\Sigma(g^{b'} g^b) \ldots \Sigma(g^{t'} g^t)\}} \qquad (p)$$

in cui considerata la g come costante, il simbolo D indica l'alternante sia rispetto alla serie delle ν lettere esplicite $a, b, c \ldots t$, sia rispetto alle omologhe $a', b', c' \ldots t'$, ed ove ad operazione eseguita si dovrà nel numeratore sostituire la ζ alla p.

elementi. Tali gruppi saranno la rappresentazione simbolica dei gruppi nati dall'alternante duplicata eseguita sulla funzione qualunque $f(g, \lambda)$.

135. Ne risulta che in un'alternante duplicata i simboli $D_g D_\lambda$ possono senza inconveniente alternarsi in modo che sia generalmente

$$D_\lambda D_g f(g, \lambda) = D_g D_\lambda f(g, \lambda),$$

e si vede che il risultato comune sarà una funzione alternata sia rispetto alla serie g, sia rispetto alla serie λ. Di fatto pel paragrafo antecedente si ha

$$D_\lambda D_g f(g, \lambda) = D_\lambda D_g \left\{ (g)^g (\lambda)^\lambda \right\} = D_\lambda (\lambda)^\lambda D_g (g)^g.$$

Se si fosse inoltre incominciato a sviluppare la $D_\lambda \left\{ (g)^g (\lambda)^\lambda \right\}$, indi si fosse presa dello sviluppo stesso la D_g, si sarebbe ottenuto

$$D_g D_\lambda \left\{ (g)^g (\lambda)^\lambda \right\} = D_g (g)^g D_\lambda (\lambda)^\lambda,$$

cioè un'espressione, il cui 2.° membro equivale al precedente stante che l'ordine scambiato nella successione degli elementi non ne altera il valore, dunque

$$D_\lambda D_g \left\{ (g)^g (\lambda)^\lambda \right\} = D_g D_\lambda \left\{ (g)^g (\lambda)^\lambda \right\}$$

ossia per essere $\quad (g)^g (\lambda)^\lambda = f(g, \lambda)$, $\quad$ sarà

$$D_\lambda D_g f(g, \lambda) = D_g D_\lambda f(g, \lambda).$$

Considerando nel 1.° membro di questa la $D_g f(g, \lambda)$ come una funzione delle variabili contenute nella serie λ, il 1.° membro essendo un'alternante rispetto alla serie λ, il risultato sarà una funzione alternata rispetto alle variabili della serie λ. Considerata parimente la $D_\lambda f(g, \lambda)$ che entra nel 2.° membro come una funzione delle variabili contenute nella serie g, essendo il 2.° membro stesso un'alternante rispetto

alla g, il risultato sarà una funzione alternata rispetto alle variabili della serie g; dunque il risultato comune è una funzione alternata sia rispetto alle variabili della serie g che rispetto alle variabili della serie λ. Giova avvertire che essendo n il numero delle basi della serie g e ν quello delle basi della serie λ, il numero dei gruppi componenti lo sviluppo dell'alternante duplicata

$$D_g D_\lambda f(g, \lambda) = D_g D_\lambda \left\{ (g)^g (\lambda)^\lambda \right\},$$

sarà dato da $(1.2.3....n)(1.2.3....\nu) = p_n p_\nu$, e nel caso di $n = \nu$ da $(p_n)^2$.

136. Le proposizioni esposte indietro rispetto all'alternante parziale, cioè all'alternante relativa ad un solo sistema alternabile possono applicarsi alle alternanti duplicate

$$D_g D_\lambda f(g, \lambda), \quad D_\lambda D_g f(g, \lambda).$$

In fatti considerata la $D_\lambda f(g, \lambda) = \phi(g)$ come una funzione delle basi della serie g ovvero la $D_g f(g, \lambda) = \psi(\lambda)$ come una funzione delle basi della serie λ, la $D_g \phi(g)$ e $D_\lambda \psi(\lambda)$ riguardate come alternanti della forma solita $D(g)^g$ godranno delle stesse proprietà che si sono dimostrate avverarsi in questa.

Alcune proposizioni dovranno applicarsi con debite modificazioni alle alternanti duplicate incominciando dal modificare opportunamente le proposizioni fondamentali che valgono per le alternanti parziali. Così in particolare ritenuto in un'alternante duplicata come positivo il gruppo fondamentale $(g)^g (\lambda)^\lambda$, un gruppo qualunque $(g_r)^g (\lambda_\rho)^\lambda$ nello sviluppo della $D_g D_\lambda \left\{ (g)^g (\lambda)^\lambda \right\}$ sarà affetto dal segno $+$ o dal segno $-$ secondo che $r + \rho$ sarà pari o dispari, indicando r il numero delle alternazioni con cui si passa da $(g)^g$ a $(g_r)^g$, e ρ quello con cui si passa da $(\lambda)^\lambda$ a $(\lambda_\rho)^\lambda$. Di fatto dietro il quadro che nasce dal prodotto $D_g (g)^g D_\lambda (\lambda)^\lambda$

come nel § 134 si concepisce facilmente che i gruppi parziali $(g_r)^g$, $(\lambda_\rho)^\lambda$ saranno positivi secondo che r e ρ saranno pari o dispari, perciò il gruppo $(g_r)^g(\lambda_\rho)^\lambda$ nato dal prodotto, e considerato poscia come una successione di elementi, sarà affetto dal segno $+$ se r, ρ saranno entrambi pari od entrambi dispari, cioè se $r+\rho$ sarà pari, e sarà affetto dal segno $-$ se uno dei numeri r, ρ sarà pari, e l'altro dispari, vale a dire se $r+\rho$ sarà dispari. Ne deriva che la regola del § 48 rispetto ai segni potrà quì parimente applicarsi considerando i rientranti dei gruppi parziali che entrano in ciascun gruppo nato dallo sviluppo dell'alternante duplicata.

Parimente, siccome due alternanti parziali possono essere eguali fra loro senza che siano eguali le funzioni come si è detto al § 103, cioè quando la differenza delle funzioni stesse è una funzione simetrica delle basi alternabili, la stessa conseguenza varrà a più forte ragione rispetto ad un'alternante duplicata. Ma per non dilungare soverchiamente questa trattazione sarà più opportuno segnalare alcune proprietà che sono speciali alle funzioni di due sistemi g, λ, le quali si verificano quando si limiti la generalità della funzione $f(g, \lambda)$, quindi dedurre alcune conseguenze rispetto a due sistemi di equazioni come si è fatto indietro rispetto ad un sistema solo.

137. Supposto che la funzione generica $f(g, \lambda)$ sia definita da

$$f(g, \lambda) = F\left\{\mathrm{f}(a, \alpha), \mathrm{f}(b, \beta), \mathrm{f}(c, \gamma) \ldots \mathrm{f}(z, \zeta)\right\} = F(g, \lambda)$$

ove il numero n delle basi della serie g è eguale al numero ν di quelle della serie λ, la f essendo una funzione qualunque e la F una funzione simetrica delle n funzioni f che essa contiene, si avrà in generale

$$D_g F(g, \lambda) = D_\lambda F(g, \lambda)$$

e il risultato comune, qualora non sia zero, sarà una funzione alternata sia rispetto alla serie g, sia rispetto alla serie λ. Di fatto s' immagini la serie de' gruppi nati dall' eseguire sulla $F(g, \lambda)$ l' operazione D_g e parimente la serie nata dall' eseguire sulla stessa $F(g, \lambda)$ l' operazione D_λ. Ritenuto, come nel § 133, che la serie

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi \ldots . \tau \ldots . \xi, \psi, \zeta$$

rappresenti la serie di n basi

$$a', b', c', d', e', f' \ldots . t' \ldots . x', y', z',$$

si chiameranno *omologhe* fra loro due basi che nelle serie g, λ occupano lo stesso posto, onde saranno omologhe fra loro le basi nelle coppie

$$(a, \alpha), \quad (b, \beta) \ldots . (t, \underset{\upsilon\rho}{\tau}) \ldots . (y, \psi), \quad (z, \zeta)$$

e si diranno quindi gruppi fra loro omologhi due gruppi delle ottenute serie che non differiscono fra loro se non per un egual numero d' alternazioni operate su basi omologhe per passare dal gruppo fondamentale $F(g, \lambda)$ ai due gruppi in discorso. Il numero de' gruppi della $D_g F$ sarà eguale al numero de' gruppi della $D_\lambda F$ per essere $n = \nu$. Posta la $D_g F$ sotto la forma simbolica $D_g \left\{ (a)^a (b)^b \ldots . (z)^z \right\}$ e la $D_\lambda F$ sotto la forma $D_\lambda \left\{ (\alpha)^\alpha (\beta)^\beta \ldots . (\zeta)^\zeta \right\}$, sarà manifesto che alla prima serie di gruppi nello sviluppo di $D_g F$ corrisponderà una serie di gruppi rispettivamente omologhi nello sviluppo di $D_\lambda F$. Ne deriva quindi che i gruppi omologhi delle due serie saranno affetti dallo stesso segno essendo eguale in entrambi il numero delle alternazioni per passare dal fondamentale ad essi gruppi. Finalmente i gruppi fra loro omologhi saranno anche fra loro eguali. Di fatto supponiamo presi di mira due gruppi omologhi, il 1.° nato dall' alternazione fra le basi l, m, ed il 2.° dall' alternazione

fra le omologhe basi λ, μ. Il gruppo fondamentale $F(g, \lambda)$ che contiene le funzioni $f(b, \beta) \ldots f(m, \mu)$ conterrà dopo l'alternazione $f(m, \beta) \ldots f(b, \mu)$. L'alternazione eseguita sulle basi omologhe β, μ ridurrà il fondamentale a contenere $f(b, \mu) \ldots f(m, \beta)$ ed i due gruppi omologhi non differiranno se non per un'alternazione eseguita fra le funzioni $f(m, \beta) \ldots f(b, \mu)$. Ma per essere la F una funzione simetrica rispetto alle diverse f rimane invariata per qualsivoglia numero d'alternazioni fra le f. I due gruppi omologhi saranno dunque eguali. Ripetuto lo stesso discorso su gruppi fra loro omologhi nati da più alternazioni fra le basi, si giungerà ancora alla conclusione che tali gruppi non differendo fra loro che per un corrispondente numero di alternazioni operate sulle funzioni f, saranno fra loro eguali, e per ciò sarà in generale $D_g F(g, \lambda) = D_\lambda F(g, \lambda)$. Inoltre essendo il 1.° membro di quest'equazione un'alternante rispetto alla serie g, ed il secondo un'alternante rispetto alla serie λ, il risultato comune, qualora non risulti zero, come nel caso in cui la funzione simetrica F si riduce alla somma delle diverse funzioni f, sarà una funzione alternata sia rispetto alla serie g, che rispetto alla serie λ.

138. Se la $f(g, \lambda)$ è definita in vece per

$$f(g, \lambda) = F\left\{f(a, \alpha)V_a,\ f(b, \beta)V_b,\ f(c, \gamma)V_c \ldots f(z, \zeta)V_z\right\} \qquad (a)$$

ove F, f hanno le significazioni già dette ed i fattori V_a, $V_b \ldots\ldots V_z$ sono funzioni simetriche delle basi α, β, $\gamma \ldots \zeta$ e funzion qualsivoglia di quella sola base che si è segnata al piede delle V, le quali non differiscono fra loro se non in quanto si passa da una all'altra collo scambiare una coll'altra la base che ciascuna di esse contiene, si avrà pure $D_g f(g, \lambda) = D_\lambda f(g, \lambda)$, ed il risultato comune sarà una funzione alternata sia rispetto alla serie g, che rispetto alla serie λ. Ciò rendesi manifesto

dal riflettere che a questa forma, sebben più complessa, può egualmente applicarsi lo stesso discorso con cui si è dedotta la proposizione analoga del precedente paragrafo.

Osserveremo che quando in una funzione $f(g, \lambda)$ si verifica l'equazione $D_g f(g, \lambda) = D_\lambda f(g, \lambda)$, il risultato comune può presentarsi sotto la forma di alternante duplicata. Di fatto presa dalla precedente equazione l'alternante D_g, si ha

$$D_g D_g f(g, \lambda) = D_g^{(2)} f(g, \lambda) = D_g D_\lambda f(g, \lambda).$$

Ma per essere § 101 $\quad D_g^{(2)} f(g, \lambda) = p_n D_g f(g, \lambda)$,

si avrà $\quad D_g f(g, \lambda) = \frac{1}{p_n} D_g D_\lambda f(g, \lambda)$

ed anche $\quad D_\lambda f(g, \lambda) = \frac{1}{p_n} D_g D_\lambda f(g, \lambda)$.

139. Suppongasi nella formola del § 137

$$f(m, \mu) = \phi_1(m)\psi_1(\mu) + \phi_2(m)\psi_2(\mu) + \cdots + \phi_n(m)\psi_n(\mu) = \sum_{\omega=1}^{\omega=n} \left(\phi_\omega(m)\psi_\omega(\mu)\right) \qquad (a)$$

ove m, μ rappresentino due qualunque basi omologhe delle serie g, λ, e riducasi la funzione simetrica F dello stesso paragrafo al prodotto delle diverse f che nascono col sostituire ad m, μ tutte le coppie omologhe delle serie g, λ in modo che abbiasi

$$f(g, \lambda) = \sum_{\omega=1}^{\omega=n} \left(\phi_\omega(a)\psi_\omega(\alpha)\right) \sum_{\omega=1}^{\omega=n} \left(\phi_\omega(b)\psi_\omega(\beta)\right) \cdots \sum_{\omega=1}^{\omega=n} \left(\phi_\omega(z)\psi_\omega(\zeta)\right) \qquad (b)$$

Si avrà qualunque siano le funzioni ϕ, ψ della base che contengono

$$D_g f(g, \lambda) = D_\lambda f(g, \lambda) = D_g\left\{\phi_1(a)\phi_2(b)\phi_3(c)\cdots\phi_n(z)\right\} D_\lambda\left\{\psi_1(\alpha)\psi_2(\beta)\cdots\psi_n(\zeta)\right\} \qquad (c)$$

Di fatto si rappresentino con indici diversi le diverse funzioni ϕ, ψ della base che contengono, ritenendo per comodo le parentesi alle basi in luogo delle parentesi agl' indici come lo richiederebbe il § 38, ossia si esprimano le funzioni per elementi $(a)^a$, $(a)^b \ldots$, $(\alpha)^\alpha$, $(\beta)^\beta \ldots$ nello stesso modo che i coefficienti del sistema (S) furono rappresentati con elementi di tale specie. La (a) diverrà espressa da

$$f(m, \mu) = (m)^a(\mu)^\alpha + (m)^b(\mu)^\beta + \ldots + (m)^z(\mu)^\zeta = \Sigma\left\{(m)^g(\mu)^\lambda\right\} \qquad (a')$$

e la (b) diverrà

$$f(g, \lambda) = \Sigma\left\{(a)^g(\alpha)^\lambda\right\}\Sigma\left\{(b)^g(\beta)^\lambda\right\}\ldots\Sigma\left\{(z)^g(\zeta)^\lambda\right\} \qquad (b').$$

Suppongasi effettuata su questa l' operazione D rispetto alle basi $a, b, c \ldots z$. Si concepiscano sviluppate le Σ che entrano nei p_n gruppi nati dal 2.° membro della (b'), ed effettuati in ciascun d'essi i prodotti che vi sono indicati. Ciascun gruppo sarà fatto di un polinomio di n^n termini, e ciascun termine consterà di un numero n di fattori presi in qualsivoglia modo nel quadro di n^2 elementi dato da

$$\begin{array}{llll}
(a)^a, & (a)^b, & (a)^c \ldots\ldots\ldots & (a) \\
(b)^a, & (b)^b, & (b)^c \ldots\ldots\ldots & (b) \\
(z)^a, & (z)^b, & (z)^c \ldots\ldots\ldots & (z) \\
 & \vdots & & \\
(c)^a, & (c)^b, & (c)^c \ldots\ldots\ldots & (c)
\end{array}$$

e di altro numero n di fattori presi nell' analogo quadro omologo

$$\begin{array}{llll}
(\alpha)^\alpha, & (\alpha)^\beta, & (\alpha)^\gamma \ldots\ldots\ldots & (\alpha)^\zeta \\
(\beta)^\alpha, & (\beta)^\beta, & (\beta)^\gamma \ldots\ldots\ldots & (\beta)^\zeta \\
 & \vdots & & \\
(\zeta)^\alpha, & (\zeta)^\beta, & (\zeta)^\gamma \ldots\ldots\ldots & (\zeta)^\zeta.
\end{array}$$

Ma pel §. 137 il risultato dev'essere un'alternante sia rispetto alle basi della serie g, sia rispetto a quelle della serie λ. Una tale condizione non potrebbe essere avverata se non in quanto il risultato stesso coincida con quello che si otterrebbe dall'alternante duplicata

$$D_g D_\lambda \left\{ (g)^g (\lambda)^\lambda \right\} = D_g D_\lambda \left\{ (a)^a (b)^b (c)^c \ldots . (z)^z (\alpha)^\alpha (\beta)^\beta \ldots . (\zeta)^\zeta \right\}.$$

Inoltre pel § 134 questa equivale a $D_g (g)^g D_\lambda (\lambda)^\lambda$, la quale non sarà più un prodotto simbolico come nel citato paragrafo, ma diverrà un prodotto effettivo rappresentato da

$$D_g \left\{ (a)^a (b)^b \ldots . (z)^z \right\} D_\lambda \left\{ (\alpha)^\alpha (\beta)^\beta \ldots . (\zeta)^\zeta \right\}.$$

Si avrà pertanto

$$D_g f(g, \lambda) = D_g \left\{ (a)^a (b)^b \ldots . (z)^z \right\} D_\lambda \left\{ (\alpha)^\alpha (\beta)^\beta \ldots . (\zeta)^\zeta \right\} \qquad (c').$$

Se si ripongono in questa per gli elementi $(a)^a$, $(b)^b \ldots . (\alpha)^\alpha \ldots$ le funzioni che esse rappresentano, la (b') si cambierà in (b), e la (c'), avuto riguardo che è $D_g f(g, \lambda) = D_\lambda f(g, \lambda)$, si cambierà nella (c).

140. Se la precedente dimostrazione lasciasse qualche dubbio sulla verità della relazione

$$\left. \begin{array}{l} D \left\{ \Sigma (a)^g (\alpha)^\lambda \Sigma (b)^g (\beta)^\lambda \ldots . \Sigma (z)^g (\zeta)^\lambda \right\} = D_g (g)^g D_\lambda (\lambda)^\lambda \\ = D \left\{ (a)^a (b)^b \ldots \ldots . (z)^z \right\} D \left\{ (\alpha)^\alpha (\beta)^\beta \ldots \ldots . (\zeta)^\zeta \right\} \end{array} \right\} \qquad (A)$$

che scriveremo più semplicemente con

$$D \left\{ \Sigma (a^g \alpha^\lambda) \Sigma (b^g \beta^\lambda) \ldots . \Sigma (z^g \zeta^\lambda) \right\} = D(g)^g D(\lambda)^\lambda \qquad (A')$$

ove l'alternante D del 1.° membro è riferibile indifferentemente o alla serie g, o alla serie λ, si può egualmente giungere a questo risultato procedendo direttamente come segue:

1.° Sia $(a + b + c + \ldots . + z)^n = (N)^n$ ove n indica il numero delle lettere $a, b, c \ldots . z$. Il coefficiente del prodotto $(abc \ldots . z) = P$ di tutte le n lettere nello

sviluppo della $(N)^n$ sarà dato da $p_n = 1.2.3 \ldots . n$. In fatti essendo

$$(N)^n = (N - z + z)^n = (N - z)^n + n(N - z)^{n-1} z + \ldots .$$

il prodotto P non potrà essere contenuto che nell'ulteriore sviluppo di $n(N - z)^{n-1} z$. Parimente il prodotto $(abc \ldots . xy)$ di $n - 1$ lettere non potrà essere contenuto che nel secondo termine dello sviluppo di

$$(N-z)^{n-1} = (N-z-y+y)^{n-1} = (N-z-y)^{n-1} + (n-1)(N-z-y)^{n-2} y + \ldots .$$

perciò il prodotto P non potrà essere contenuto che nel termine $n(n-1) z y (N - z - y)^{n-2}$. Per lo stesso modo siccome il prodotto $(abc \ldots . uvx)$ di $n - 2$ lettere nello sviluppo di $(N - z - y)^{n-2}$ non potrà essere contenuto che nel termine $(n - 2)(N - z - y - x)^{n-3} x$, così il prodotto P non potrà essere contenuto che nel termine

$$n(n-1)(n-2) zyx (N - z - y - x)^{n-3}.$$

Così progredendo, risulterà manifesto che il prodotto P non potrà essere contenuto che nel termine

$$\left\{ n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots . 4.3 \right\} (zyx \ldots . dc)(a + b)^2$$
$$= \left(n(n-1) \ldots . 4.3 \right) (zy \ldots . dc)(a^2 + 2ab + b^2),$$

onde risulta che il prodotto in questione comparirà nello sviluppo della $(N)^n$ affetto dal coefficiente

$$n(n-1)(n-2) \ldots . 4.3.2 = 1.2.3 \ldots . n = p_n.$$

Ne risulta che il termine della forma $A a^a a^b a^c \ldots . a^x a^y a^z$

nello sviluppo di $(a^a + a^b + a^c + \ldots . + a^x + a^y + a^z)^n$

sarà dato da $1.2.3 \ldots . n(a^a a^b a^c \ldots . a^x a^y a^z)$.

2.° Il numero de' termini che nello sviluppo del prodotto

$$Q = \left((a)^a + (a)^b \cdots + (a)^z\right)\left((b)^a + (b)^b \cdots + (b)^z\right) \cdots \left((z)^a + (z)^b \cdots + (z)^z\right)$$

composto di n fattori avranno per basi la serie $(a)(b)(c)\ldots(z)$ e per indici la serie totale delle $a, b, c \ldots z$ comunque disposte, ma senza ripetizione di lettere, sarà dato da $1.2.3\ldots n$, e l'aggregato di tali termini coinciderà coll'aggregato de' gruppi che si ottengono dallo sviluppo della simetrica $S\left\{(a)^a(b)^b(c)^c\ldots(z)^z\right\}$. In fatti supposto eseguito il prodotto indicato da Q, i termini di tale specie diverranno tutti eguali fra loro quando si suppongano eguali fra loro tutte le basi, quando sia cioè $b = c = d = \cdots = y = z = a$. Il risultato sarà quello che si otterrebbe dallo sviluppo di $\left((a)^a + (a)^b + (a)^c + \cdots + (a)^z\right)^n$; ma in tal caso il numero dei termini eguali a $(a)^a(a)^b(a)^c\cdots(a)^z$ è dato da p_n, dunque anche nel primo caso il numero dei termini in questione sarà $= p_n$. Siccome nello sviluppo del prodotto Q accadono tutte le possibili combinazioni che esistono fra gli elementi che compongono ciascun fattore, così l'aggregato dei termini in discorso dovrà coincidere con quello che nasce dallo sviluppo della simetrica $S\left\{(a)^a(b)^b\ldots(z)^z\right\}$, il cui numero de' gruppi è appunto $= p_n$.

3.° Supposto $p_n - 1 = m$, rappresentiamo con $G + G_1 + G_2 + \cdots + G_m$ la somma dei diversi gruppi che nascono dallo sviluppo di $S(n)$ ordinati a seconda del numero delle alternazioni necessarie per passare dal gruppo fondamentale $(g)^g = G$ ad uno qualunque di essi, e sia $H + H_1 + H_2 + \cdots + H_q$ l'aggregato di tutti gli altri gruppi ad indici ripetuti provenienti dallo sviluppo della espressione Q, essendo $q = n^n - (p_n + 1)$, sarà

$$Q = \left\{\begin{array}{l} G + G_1 + G_2 + \cdots + G_m \\ H + H_1 + H_2 + \cdots\cdots + H_q \end{array}\right\} \qquad (a)$$

Chiamisi inoltre $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \ldots \Lambda_m$

ciò che diventano le $G, G_1, G_2 \ldots G_m$

e $\Xi, \Xi_1, \Xi_2 \ldots \Xi_q$

ciò che diventano le $H, H_1, H_2 \ldots H_q$

quando si sostituiscono alle lettere $a, b, c \ldots z$ tanto nelle basi che negl' indici le corrispondenti omologhe $a', b', c' \ldots z'$ che abbiam convenuto di rappresentare colle lettere greche $\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta$.

4.° Suppongasi ora che nel prodotto Q e nel polinomio (a) si sostituiscano agli elementi del quadro

$$\begin{matrix} (a)^a, & (a)^b, & (a)^c \ldots\ldots & (a)^z \\ (b)^a, & (b)^b, & (b)^c \ldots\ldots & (b)^z \\ \vdots & & & \\ (z)^a, & (z)^b, & (z)^c \ldots\ldots & (z)^z \end{matrix} \qquad (b)$$

i rispettivi termini del quadro

$$\begin{matrix} (a)^a(\alpha)^\alpha, & (a)^b(\alpha)^\beta, & (a)^c(\alpha)^\gamma \ldots & (a)^z(\alpha)^\zeta \\ (b)^a(\beta)^\alpha, & (b)^b(\beta)^\beta, & (b)^c(\beta)^\gamma \ldots & (b)^z(\beta)^\zeta \\ \vdots & & & \\ (z)^a(\zeta)^\alpha, & (z)^b(\zeta)^\beta, & (z)^c(\zeta)^\gamma \ldots & (z)^z(\zeta)^\zeta. \end{matrix} \qquad (c)$$

Il prodotto Q diverrà espresso da

$$\Sigma(a)^g(\alpha)^\lambda\, \Sigma(b)^g(\beta)^\lambda\, \Sigma(c)^g(\gamma)^\lambda \ldots \Sigma(z)^g(\zeta)^\lambda$$

che indicheremo con $f(g, \lambda)$, ed il polinomio (a) diverrà espresso da

$$f(g, \lambda) = \left\{ \begin{matrix} H\Xi + H_1\Xi_1 + H_2\Xi_2 \ldots + H_q\Xi_q \\ G\Lambda + G_1\Lambda_1 + \ldots\ldots + G_m\Lambda_m \end{matrix} \right\} \qquad (d)$$

Siccome ciascuno dei fattori $H, H_1, H_2 \ldots H_q$; $G, G_1, G_2 \ldots G_m$ contiene tutte le basi della serie g indipendente da λ, e ciascuno dei fattori $\Xi, \Xi_1, \Xi_2 \ldots \Xi_q$; $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \ldots \Lambda_m$ tutte le basi della serie λ indipendente da g, così se dell'espressione (d) si piglia l'alternante D_g o l'alternante D_λ, si avrà pei §§ 100, 133

$$D_g f(g, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} \Xi D_g H + \Xi_1 D_g H_1 + \ldots + \Xi_q D_g H_q \\ \Lambda D_g G + \Lambda_1 D_g G_1 + \ldots + \Lambda_m D_g G_m \end{array} \right\} \quad (e)$$

$$D_\lambda f(g, \lambda) = \left\{ \begin{array}{l} H D_\lambda \Xi + H_1 D_\lambda \Xi_1 + \ldots + H_q D_\lambda \Xi_q \\ G D_\lambda \Lambda + G_1 D_\lambda \Lambda_1 + \ldots + G_m D_\lambda \Lambda_m \end{array} \right\} \quad (f)$$

Si consideri un termine qualunque $\Xi_i D_g H_i$ della (e) ed un termine generico $H_i D_\lambda \Xi_i$ della (f). Una qualunque H_i sarà il prodotto di n elementi aventi per basi la serie $a, b, c \ldots z$, e per indici una successione di n lettere prese nella serie g, ove ne mancheranno alcune che saranno supplite dalla ripetizione di alcune altre. Dicasi lo stesso di una qualsivoglia Ξ_i rispetto alle n lettere omologhe della serie λ. Le $D_g H_i$, $D_\lambda \Xi_i$ si potranno considerare come il risultato di alternanti in cui siansi fatti due o più indici eguali fra loro, o come alternanti di funzioni simetriche rispetto a due o più basi, onde, sia pel § 56 che pel § 102 risulterà per qualsivoglia valore della i $D_g H_i = D_\lambda \Xi_i = 0$. Le (e), (f) saranno così ridotte a

$$D_g f(g, \lambda) = \Lambda D_g G + \Lambda_1 D_g G_1 + \Lambda_2 D_g G_2 + \ldots + \Lambda_m D_g G_m \quad (g)$$

$$D_\lambda f(g, \lambda) = G D_\lambda \Lambda + G_1 D_\lambda \Lambda_1 + G_2 D_\lambda \Lambda_2 + \ldots + G_m D_\lambda \Lambda_m \quad (h)$$

Ma pel § 54 si ha $D G' = \pm D G$ ove vale il segno $+$ o il $-$ secondo che il numero delle alternazioni per passare dal gruppo fondamentale G al gruppo G' è pari o

dispari. Si avrà dunque

$$D_g G_1 = -D_g G, \quad D_g G_2 = D_g G, \quad D_g G_3 = -D_g G \ldots D_g G_m = \pm D_g G$$

e sarà parimente

$$D_\lambda \Lambda_1 = -D_\lambda \Lambda, \quad D_\lambda \Lambda_2 = D_\lambda \Lambda, \quad D_\lambda \Lambda_3 = -D_\lambda \Lambda \ldots D_\lambda \Lambda_m = \pm D_\lambda \Lambda$$

Le espressioni (g), (h), raccolto il fattore comune $D_g G$, $D_\lambda \Lambda$, diverranno

$$D_g f(g, \lambda) = \left\{ \Lambda - \Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda_3 + \cdots \pm \Lambda_m \right\} D_g G;$$

$$D_\lambda f(g, \lambda) = \left\{ G - G_1 + G_2 - G_3 + \cdots \pm G_m \right\} D_\lambda \Lambda.$$

Ma nella $\quad S\left\{ G \right\} = G + G_1 + G_2 + \cdots + G_m$,

e nella $\quad S\left\{ \Lambda \right\} = \Lambda + \Lambda_1 + \Lambda_2 + \cdots + \Lambda_m$

il simbolo S si cambia in D quando nei 2.i membri i segni $+$ innanzi ai gruppi nati da un numero dispari di alternazioni si cambino in $-$. Per essere pertanto

$$G - G_1 + G_2 - \cdots \pm G_m = D_g G \quad \text{e} \quad \Lambda - \Lambda_1 + \Lambda_2 - \cdots \pm \Lambda_m = D_\lambda \Lambda$$

si avrà

$$D_g f(g, \lambda) = D_\lambda \Lambda \, D_g G, \quad D_\lambda f(g, \lambda) = D_g G \, D_\lambda \Lambda.$$

Queste due espressioni contengono la formola (A) che era da dimostrarsi.

Se nel prodotto indicato da Q si fossero impiegati gli elementi invertiti, sostituiti nei quadri (b), (c), essi avrebbero dato per risultato il valore invertito di Q, cioè

$$Q = \Sigma(g)^\varepsilon (\lambda)^\alpha \, \Sigma(g)^\delta (\lambda)^\beta \ldots \Sigma(g)^\varepsilon (\lambda)^\zeta.$$

Rappresentata questa espressione ancora con $f(g, \lambda)$ e seguito lo stesso andamento, si sarebbe analogamente ottenuto $Df(g, \lambda) = D^g(G) \, D^\lambda(\Lambda)$. Vale a dire che l'alternante di Q

rispetto alla serie g ovvero alla serie λ degl' indici eguaglia il prodotto delle alternanti parziali rispetto agl' indici. Ma siccome ciascun' alternante parziale rispetto agl' indici è eguale all' analoga alternante parziale rispetto alle basi, così si dovrà conchiudere che l' alternante della Q sia rispetto alle basi che agl' indici, tanto riguardo alla serie g che alla serie λ è eguale al prodotto delle alternanti parziali sia rispetto alle basi che rispetto agl' indici. Ommesse per compendio le parentesi alle basi, si avrà analogamente alla formola (A') l' espressione

$$D\left\{\Sigma(g^a\lambda^\alpha)\,\Sigma(g^b\lambda^\beta)\,\Sigma(g^c\lambda^\gamma)\ldots\Sigma(g^z\lambda^\zeta)\right\} = D(g)^g\,D(\lambda)^\lambda \qquad (B).$$

Se nel prodotto Q si fossero impiegati gli elementi invertiti dei quadri (b), (c), lasciati però invariati gli elementi costituiti dalle lettere greche, si sarebbe ottenuto il valore

$$Q = \Sigma(a^g\lambda^\alpha)\,\Sigma(b^g\lambda^\beta)\ldots\Sigma(z^g\lambda^\zeta)$$

e chiamata parimente $f(g, \lambda)$ una tale espressione, seguendo lo stesso andamento, si sarebbe ottenuto $Df(g, \lambda) = D^g(G)D_\lambda(\Lambda)$, e per le ragioni superiormente addotte si sarebbe ottenuta una relazione analoga alla (B) espressa da

$$D\left\{\Sigma(a^g\lambda^\alpha)\,\Sigma(b^g\lambda^\beta)\ldots\Sigma(z^g\lambda^\zeta)\right\} = D(g)^g\,D(\lambda)^\lambda \qquad (C).$$

141. Se nella formola (a) del § 139 si suppone che le funzioni ϕ, ψ si riducano a potenze omologhe delle basi, ossia che la (a) diventi

$$f(m, \mu) = m^a\mu^\alpha + m^b\mu^\beta + m^c\mu^\gamma + \ldots + m^z\mu^\zeta$$

e che inoltre alle serie $a, b, c \ldots z$; $\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta$ degli esponenti si sostituiscano rispettivamente i numeri $0.1.2.3\ldots n-2$, $n-1$, si avrà

$$f(m, \mu) = 1 + m\mu + m^2\mu^2 + \ldots + m^{n-1}\mu^{n-1} = \frac{1 - m^n\mu^n}{1 - m\mu}$$

e la formola (A) del § 140 darà

$$D\left\{\frac{1-a^n\alpha^n}{1-a\,\alpha}\cdot\frac{1-b^n\beta^n}{1-b\,\beta}\cdot\frac{1-c^n\gamma^n}{1-c\,\gamma}\cdots\frac{1-z^n\zeta^n}{1-z\,\zeta}\right\}=D\left\{a^0b^1c^2\ldots z^{n-1}\right\}D\left\{\alpha^0\beta^1\gamma^2\ldots\zeta^{n-}\right.$$

ove nel 1.° membro la D è l'alternante sia rispetto alla serie a, b, $c\ldots z$ delle basi, sia rispetto alla serie α, $\beta\ldots\zeta$. Rappresentando con $\varphi(g,\lambda)$ il prodotto sotto la D del 1.° membro ed avuto riguardo ai valori che assumono le alternanti parziali del 2.° membro dietro il § 95, si otterrà

$$D\,\varphi(g,\lambda)=\left\{\begin{array}{l}\left\{(b-a)(c-a)(c-b)\ldots(z-a)(z-b)\ldots(z-y)\right\}\\ \left\{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)\ldots(\zeta-\psi)\right\}\end{array}\right\}$$

142. Nello stesso modo che l'espressione $\{P\}$ del § 96 rappresenta simbolicamente una qualsivoglia $D(g)^g$, così il 2.° membro di questa rappresenterà simbolicamente l'espressione $Df(g,\lambda)$, ossia il 1.° membro della (A) quando eseguiti i prodotti indicati e completati i gruppi colla base che manca affetta dall'esponente zero, si cambi la serie $0.1.2\ldots n-1$ degli esponenti nelle serie a, b, $c\ldots z$, ed α, β, $\gamma\ldots\zeta$ degl'indici.

Il processo generale che si è seguito quando le lettere a cui sono elevate le basi si considerano come veri indici mostra che nel caso particolare in cui tali indici si cambiano in esponenti, deve avverarsi la proposizione che una funzione intera $\varphi(g,\lambda)$ fatta di due serie g, λ di basi ed in cui sia soddisfatta la condizione $D_g\,\varphi(g,\lambda)=D_\lambda\,\varphi(g,\lambda)$ sarà rappresentabile pel prodotto

$$\pm D(g)^g D(\lambda)^\lambda=\pm D\left\{a^0b^1c^2\ldots z^{n-1}\right\}D\left\{\alpha^0\beta^1\gamma^2\ldots\zeta^{n-1}\right\}$$

ove i diversi casi speciali della φ indicheranno quali dei due segni $+$ o $-$ debba aver luogo.

143. Così in particolare se nella formola (a) del § 138 si suppone

$$V_p = (p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)\ldots\ldots(p-\zeta)$$

ove p è una lettera qualsivoglia della serie g, e sia inoltre $f(m, \mu) = \frac{1}{m-\mu}$ ove m, μ sono due lettere omologhe qualunque della serie g, λ, e la simetrica F sia quella data dal prodotto delle espressioni che in essa entrano, si avrà

$$F\left\{f(a, \alpha)V_a,\ f(b, \beta)V_b,\ f(c, \gamma)V_c\ldots\ldots f(z, \zeta)V_z\right\}$$

$$= \frac{(a-\alpha)(a-\beta)\ldots\ldots(a-\zeta)}{a-\alpha} \cdot \frac{(b-\alpha)(b-\beta)\ldots\ldots(b-\zeta)}{b-\beta} \cdot \frac{(c-\alpha)(c-\beta)\ldots\ldots(c-\zeta)}{c-\gamma} \ldots\ldots \frac{(z-\alpha)(z-\beta)\ldots\ldots(z-\zeta)}{z-\zeta}$$

$$= \left\{(a-\beta)(a-\gamma)\ldots(a-\zeta)\right\}\left\{(b-\alpha)(b-\gamma)\ldots(b-\zeta)\right\}\left\{(c-\alpha)(c-\beta)\ldots(c-\zeta)\right\}\ldots\left\{(z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\psi)\right\}$$

Questa espressione che porremo eguale a $\varphi(g, \lambda)$ è una funzione intera sia rispetto alla serie g che rispetto alla serie λ, e siccome è soddisfatta dietro il citato paragrafo la condizione $D_g\varphi(g, \lambda) = D_\lambda\varphi(g, \lambda)$, così si avrà

$$D\varphi(g, \lambda) = \pm D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots\ldots z^{n-1}\right\} D\left\{\alpha^0 \beta^1 \gamma^2 \ldots\ldots \zeta^{n-1}\right\}$$

$$= \pm\left\{(b-a)(c-a)(c-b)\ldots\ldots(z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-y)\right\}\left\{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots\ldots(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)\ldots\ldots(\zeta-\psi)\right\}$$

144. Procedendo direttamente alla ricerca del valore della precedente espressione $D\varphi(g, \lambda)$ come si è fatto nel § 140, si giunge all'equazione

$$D\varphi(g, \lambda) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots\ldots z^{n-1}\right\} D\left\{\alpha^0 \beta^1 \gamma^2 \ldots\ldots \zeta^{n-1}\right\}$$

che non contiene più alcuna ambiguità di segno. Di fatto nel valore

$$\varphi(g, \lambda) = \left\{(a-\beta)(a-\gamma)\ldots(a-\zeta)\right\}\left\{(b-\alpha)(b-\gamma)\ldots\ldots(b-\zeta)\right\}\ldots\left\{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\ldots\ldots(z-\psi)\right\} \quad (a)$$

un fattore generico $\{(m-\alpha)(m-\beta)(m-\gamma)\ldots\ldots(m-\zeta)\}$ sviluppato per le potenze di m sarà della forma

$$Am^{n-1}-Bm^{n-2}+Cm^{n-3}\ldots\ldots\pm Hm\pm Km^{0} \qquad (b)$$

ove i coefficienti delle potenze di m saranno funzioni note delle sole lettere contenute nella serie $\lambda-\mu$. Posto

$$A=(\lambda-\mu)^{\alpha}-B=(\lambda-\mu)^{\beta},\ C=(\lambda-\mu)^{\gamma},\ldots\ldots\pm K=(\lambda-\mu)^{\zeta}$$

e sostituita alla serie $n-1$, $n-2$, $n-3\ldots\ldots 2$, 1, 0 di esponenti numerici una serie di esponenti espressi in generale per le lettere a, b, $c\ldots\ldots x$, y, z, si avrà dalla (a)

$$m^{a}(\lambda-\mu)^{\alpha}+m^{b}(\lambda-\mu)^{\beta}+m^{c}(\lambda-\mu)^{\gamma}+\ldots\ldots+m^{z}(\lambda-\mu)^{\zeta}=\Sigma\, m^{g}(\lambda-\mu)^{\lambda}$$

ove il segno Σ si riferisce soltanto agl' indici g, λ, rimanendo costante $\lambda-\mu$. Esprimendo analogamente con Σ ciascuno dei fattori della (a) col cambiare le basi omologhe generiche m, μ in quelle che loro corrispondono, si avrà

$$\phi(g,\ \lambda)=\Sigma\, a^{g}(\lambda-\alpha)^{\lambda}\,\Sigma\, b^{g}(\lambda-\beta)^{\lambda}\,\Sigma\, c^{g}(\lambda-\gamma)^{\lambda}\ldots\ldots\Sigma\, z^{g}(\lambda-\mu)^{\lambda}.$$

Presa di questa l'alternante D_g, siccome sarà essa della forma (A) del § 140, così eseguito lo stesso processo ivi indicato e non curandoci di ciò che esprimono in questo caso le

$$\Lambda,\ \Lambda_1,\ \Lambda_2\ldots\ldots\Lambda_m;\ \ \Xi,\ \Xi_1,\ \Xi_2\ldots\ldots\Xi_q,$$

si giungerà ad un'equazione analoga alla (g) che esprimeremo con

$$D_g\phi(g,\ \lambda)=\Pi\, D_g G$$

ove Π esprime un aggregato di termini composti soltanto di lettere appartenenti alla serie λ. Sostituiti agli esponenti generici a, b, $c\ldots\ldots x$, y, z gli esponenti numerici che essi rappresentano, sarà

$$D_g\phi(g,\ \lambda)=\Pi\, D\left\{a^{n-1}b^{n-2}c^{n-3}\ldots\ldots x^{2}y^{1}z^{0}\right\},$$

e per la solita relazione $DG' = \pm DG$ sarà

$$D_g\phi(g, \lambda) = \pm \Pi D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots . z^{n-1}\right\} \qquad (c)$$

valendo il $+$ o il $-$ secondo che il numero m delle alternazioni per passare da $a^{n-1}b^{n-2}\ldots.y^1z^0$ a $a^0b^1c^2\ldots.z^{n-1}$ sarà pari o dispari. Ma sarà $m = \frac{n}{2}$ per n pari ed $m = \frac{n-1}{2}$ per n dispari. Avrà dunque luogo il $+$ o il $-$ secondo che sarà pari o dispari la $\frac{n}{2}$ per n pari, o la $\frac{n-1}{2}$ per n dispari, o ciò che è lo stesso avrà luogo il $+$ o il $-$ secondo che $\frac{n(n-1)}{2}$ sarà pari o dispari qualunque siasi n. Si avrà dunque

$$D_g\phi(g, \lambda) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots . z^{n-1}\right\} \Pi \qquad (d).$$

Se ora nel 2.° membro della (a) si raccolgono tutti i fattori binomj contenenti α, indi quelli contenenti β e così di seguito, la stessa (a) prende la forma

$$\phi(g, \lambda) = \left\{(b-\alpha)(c-\alpha)(d-\alpha)\ldots.(z-\alpha)\right\}\left\{(a-\beta)(c-\beta)\ldots.(z-\beta)\right\}\ldots.\left\{(a-\zeta)(b-\zeta)\ldots.(y-\zeta)\right\}$$

Essendo n il numero di fattori racchiusi fra le parentesi $\{\ldots.\}$ ed $n-1$ il numero dei fattori binomj contenuti in ciascuna, il numero totale dei fattori binomj sarà $n(n-1)$, che per essere numero sempre pari permetterà il cambiamento di segno a ciascun di essi, e si avrà

$$\phi(g, \lambda) = \left\{(\alpha-b)(\alpha-c)\ldots.(\alpha-z)\right\}\left\{(\beta-a)(\beta-c)\ldots.(\beta-z)\right\}\ldots.\left\{(\zeta-a)(\zeta-b)\ldots.(\zeta-y)\right\}$$

Questa espressione essendo la stessa (a) in cui siansi scambiate le lettere della serie g con quelle della serie λ, presane l'alternante D_λ, si avrà per risultato ciò che diventa la (d) quando in essa si alterni la serie g colla serie λ, sarà cioè

$$D_\lambda\phi(g, \lambda) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D\left\{(\alpha^0 \beta^1 \gamma^2 \ldots . \zeta^{n-1}\right\} P \qquad (e),$$

ove la P è ciò che diventa Π quando alle lettere della serie λ si sostituiscono le omologhe della serie g. Ma siccome dev' essere $D_g \phi(g, \lambda) = D_\lambda \phi(g, \lambda)$, così si avrà dalle (d), (e)

$$\Pi D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots . z^{n-1}\right\} = P D\left\{\alpha^0 \beta^1 \gamma^2 \ldots . \zeta^{n-1}\right\}.$$

Ma essendo Π una funzione delle sole $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \zeta$ e la P un' analoga funzione delle sole $a, b, c \ldots . z$, dovrà essere

$$\Pi = D\left\{\alpha^0 \beta^1 \gamma^2 \ldots . \zeta^{n-1}\right\}, \quad P = D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots . z^{n-1}\right\}$$

perciò da ciascuna delle due equazioni (d), (e) risulterà come si era enunciato

$$D\phi(g, \lambda) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots . z^{n-1}\right\} D\left\{\alpha^0 \beta^1 \gamma^2 \ldots . \zeta^{n-1}\right\}.$$

145. Se nell'espressione

$$\phi(g, \lambda) = \frac{(a-\alpha)(a-\beta)\ldots(a-\zeta)(b-\alpha)(b-\beta)\ldots(b-\zeta)\ldots(z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\zeta)}{(a-\alpha)(b-\beta)(c-\gamma)\ldots.(y-\psi)(z-\zeta)}$$

del § 143 si pone il numeratore $= V$ ed il denominatore $= N$, si è veduto essere

$$D\left(\frac{V}{N}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D\left\{a^0 b^1 c^2 \ldots . z^{n-1}\right\} D\left\{\alpha^0 \beta^1 \gamma^2 \ldots . \zeta^{n-1}\right\} \qquad (a).$$

Sia ora F una funzione simetrica rispetto alle basi della serie g, e Q una funzione qualsivoglia delle stesse basi. Nel prendere l'alternante D_g del prodotto FQ, rimanendo invariata la F, si dovrà essa considerare come costante, e si avrà $D_g FQ = F D_g Q$. Essendo la V nella $D\left(\frac{V}{N}\right)$ una funzione simetrica sia rispetto alla serie g, sia rispetto alla serie λ, così sarà $D\left(\frac{V}{N}\right) = V D\left(\frac{1}{N}\right)$, e perciò la

(a), sostituiti i valori delle due alternanti parziali del 2.° membro come nel § 141, si ridurrà a

$$D\left(\frac{1}{N}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times$$

$$\frac{\{(b-a)(c-a)(c-b)\ldots(z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-y)\}\{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\ldots(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)\ldots(\zeta-\psi)\}}{(a-\alpha)(a-\beta)\ldots(a-\zeta)(b-\alpha)(b-\beta)\ldots(b-\zeta)(c-\alpha)(c-\beta)\ldots(c-\zeta)\ldots(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)\ldots(z-\zeta)}$$

Il numero $n(n-1)$ dei fattori binomj del numeratore qualunque siasi n essendo numero pari, si potrà a ciascun d'essi cambiare il segno. Ordinati quindi i fattori stessi a seconda delle $a, b, c \ldots z$ e delle $\alpha, \beta \ldots \zeta$, e posto

$$(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-z)(b-c)(b-d)\ldots(b-z)\ldots(x-y)(x-z)(y-z) = T$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\zeta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots(\beta-\zeta)\ldots(\xi-\psi)(\xi-\zeta)(\psi-\zeta) = \Theta,$$

si avrà

$$D\left(\frac{1}{N}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{T\Theta}{V}.$$

Se si chiama inoltre N', V', ciò che diventano N, V quando si cambino i segni ai rispettivi fattori binomj, siccome sarà

$$\frac{1}{N} = (-1)^n \frac{1}{N'}, \quad \frac{1}{V} = (-1)^{n^2} \frac{1}{V'} = (-1)^n \frac{1}{V'},$$

così si otterrà ancora

$$D\left(\frac{1}{N'}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{T\Theta}{V'}$$

ed anche

$$D\left(\frac{1}{N}\right) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{T\Theta}{V'}.$$

146. Siano dati fra le $2n$ incognite

$$(z_1)^a\,,\quad (z_1)^b\,,\quad (z_1)^c\,\ldots\ldots(z_1)^y\,,\quad (z_1)^z$$

$$(\alpha)^{z_1}\,,\quad (\beta)^{z_1}\,,\quad (\gamma)^{z_1}\,\ldots\ldots(\psi)^{z_1}\,,\quad (\zeta)^{z_1}$$

due sistemi di $2n$ equazioni della forma

$$\left.\begin{array}{l}
(\alpha)^{\alpha}(z_1)^a + (\alpha)^{\beta}(z_1)^b + (\alpha)^{\gamma}(z_1)^c + \ldots\ldots + (\alpha)^{\zeta}(z_1)^z = (\alpha)^{\zeta_1} \\
(\beta)^{\alpha}(z_1)^a + (\beta)^{\beta}(z_1)^b + (\beta)^{\gamma}(z_1)^c + \ldots\ldots + (\beta)^{\zeta}(z_1)^z = (\beta)^{\zeta_1} \\
\vdots \\
(\zeta)^{\alpha}(z_1)^a + (\zeta)^{\beta}(z_1)^b + (\zeta)^{\gamma}(z_1)^c + \ldots\ldots + (\zeta)^{\zeta}(z_1)^z = (\zeta)^{\zeta_1}
\end{array}\right\}\quad(\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l}
(a)^a(\alpha)^{z_1} + (b)^a(\beta)^{z_1} + (c)^a(\gamma)^{z_1} + \ldots\ldots + (z)^a(\zeta)^{z_1} = (z_1)^a \\
(a)^b(\alpha)^{z_1} + (b)^b(\beta)^{z_1} + (c)^b(\gamma)^{z_1} + \ldots\ldots + (z)^b(\zeta)^{z_1} = (z_1)^b \\
\vdots \\
(a)^z(\alpha)^{z_1} + (b)^z(\beta)^{z_1} + (c)^z(\gamma)^{z_1} + \ldots\ldots + (z)^z(\zeta)^{z_1} = (z_1)^z
\end{array}\right\}\quad(a)$$

Il valore dell' incognita generica $(\mu)^{z_1}$ sarà dato in funzione dei soli parametri dei due sistemi (α), (a) dall'espressione

$$(\mu)^{z_1} = \frac{H}{D(g)^g\,D(\lambda)^\lambda}\qquad (E)$$

essendo

$$H = \pm\left\{\begin{array}{l}
D(g-m)^{g-z}\,D(\lambda)^{\lambda(\zeta=\zeta_1)} + D(g-m)^{g-y}\,D(\lambda)^{\lambda(\psi=\zeta_1)} \\
+ D(g-m)^{g-x}\,D(\lambda)^{\lambda(\xi=\zeta_1)} + \ldots\ldots + D(g-m)^{g-\alpha}\,D(\lambda)^{\lambda(\alpha=\zeta_1)}
\end{array}\right\}$$

ove avrà luogo il segno $+$ o il $-$ secondo che m, ovvero la base omologa μ occupa un posto π dispari o pari nella serie g o nella serie λ contate da destra a sinistra. In fatti il sistema (α) dà per valore dell' incognita

generica $(z_1)^m$ l'espressione

$$(z_1)^m = \frac{D(\lambda)^{\lambda(\mu=\zeta_1)}}{D(\lambda)^\lambda} \qquad (m).$$

Parimente il valore dell'incognita generica $(\mu)^{z_1}$ desunto dal sistema (a) sarà

$$(\mu)^{z_1} = \frac{D(g(m=z_1))^g}{D(g)^g} \qquad (\mu).$$

Ma sviluppando $D(g)^g$ a seconda della base m, si ha dalla formola (b') del § 71

$$D(g)^g = \pm\left\{D(g-m)^{g-z}(m)^z - D(g-m)^{g-y}(m)^y + \cdots \pm D(g-m)^{g-a}(m)^a\right\}$$

ove avrà luogo il $+$ o il $-$ nel secondo membro, secondo che m nella serie g contata da destra a sinistra occupa un posto dispari o pari, e perciò

$$D\big(g(m=z_1)\big)^g = \pm\left\{D(g-m)^{g-z}(z_1)^z - D(g-m)^{g-y}(z_1)^y + \cdots \pm D(g-m)^{g-a}(z_1)^a\right\}$$

Ma l'equazione generica (m) somministra per le diverse incognite i seguenti valori

$$(z_1)^z = \frac{D(\lambda)^{\lambda(\zeta=\zeta_1)}}{D(\lambda)^\lambda}, \quad (z_1)^y = -\frac{D(\lambda)^{\lambda(\psi=\zeta_1)}}{D(\lambda)^\lambda}, \quad (z_1)^x = \frac{D(\lambda)^{\lambda(\xi=\zeta_1)}}{D(\lambda)^\lambda},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (z_1)^b = \mp\frac{D(\lambda)^{\lambda(\beta=\zeta_1)}}{D(\lambda)^\lambda}, \quad (z_1)^a = \pm\frac{D(\lambda)^{\lambda(\alpha=\zeta_1)}}{D(\lambda)^\lambda},$$

e perciò

$$D\big(g(m=z_1)\big)^g = \pm\frac{1}{D(\lambda)^\lambda}\left\{\begin{array}{l} D(g-m)^{g-z}D(\lambda)^{\lambda(\zeta=\zeta_1)} + D(g-m)^{g-y}D(\lambda)^{\lambda(\psi=\zeta_1)} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + D(g-m)^{g-a}D(\lambda)^{\lambda(\alpha=\zeta_1)} \end{array}\right\}$$

Sostituito questo valore nella (μ), si ottiene l'enunciato valore dell'incognita generica $(\mu)^{z_1}$.

147. Il valore di H del precedente paragrafo verrà più compendiosamente espresso da $H = D(\lambda)^{g(m=\zeta_1)}$ in cui il secondo membro è ciò che diventa lo sviluppo di $D(\lambda)^{\lambda}$ quando alla serie λ degl' indici sostituita la serie g vi si ponga prima $m = \zeta_1$ e poscia si sostituiscano agli elementi

$$\begin{array}{l} (\alpha)^a, \quad (\alpha)^b, \quad (\alpha)^c \ldots . (\alpha)^z \\ (\beta)^a, \quad (\beta)^b, \quad (\beta)^c \ldots . (\beta)^z \\ \vdots \\ (\zeta)^a, \quad (\zeta)^b, \quad (\zeta)^c \ldots . (\zeta)^z \end{array},$$

le rispettive espressioni che esse rappresentano date dalle

$$\begin{array}{l} (\alpha)^a = \Sigma(a^g\alpha^\lambda), \quad (\alpha)^b = \Sigma(b^g\alpha^\lambda) \ldots . (\alpha)^z = \Sigma(z^g\alpha^\lambda) \\ (\beta)^a = \Sigma(a^g\beta^\lambda), \quad (\beta)^b = \Sigma(b^g\beta^\lambda) \ldots . (\beta)^z = \Sigma(z^g\beta^\lambda) \\ \vdots \\ (\zeta)^a = \Sigma(a^g\zeta^\lambda), \quad (\zeta)^b = \Sigma(b^g\zeta^\lambda) \ldots . (\zeta)^z = \Sigma(z^g\zeta^\lambda), \end{array} \qquad (a)$$

il valore dell' incognita generica $(\mu)^{z_1}$ essendo dato da

$$(\mu)^{z_1} = \frac{D(\lambda)^{g(m=\zeta_1)}}{D(g)^g\, D(\lambda)^{\lambda}} \qquad (E').$$

Di fatto se i valori delle incognite $(z_1)^a$, $(z_1)^b \ldots . (z_1)^z$ dati dal sistema (a) del paragrafo antecedente si pongono nel sistema (α), e siansi disposti i termini a seconda delle incognite $(\alpha)^{z_1}$, $(\beta)^{z_1} \ldots . (\mu)^{z_1} \ldots . (\zeta)^{z_1}$, si otterrà il sistema

$$\begin{array}{l} \Sigma(a^g\alpha^\lambda)(\alpha)^{z_1} + \Sigma(b^g\alpha^\lambda)(\beta)^{z_1} + \ldots . + \Sigma(z^g\alpha^\lambda)(\zeta)^{z_1} = (\alpha)^{\zeta_1} \\ \Sigma(a^g\beta^\lambda)(\alpha)^{z_1} + \Sigma(b^g\beta^\lambda)(\beta)^{z_1} + \ldots . + \Sigma(z^g\beta^\lambda)(\zeta)^{z_1} = (\beta)^{z_1} \\ \vdots \\ \Sigma(a^g\zeta^\lambda)(\alpha)^{z_1} + \Sigma(b^g\zeta^\lambda)(\beta)^{z_1} + \ldots . + \Sigma(z^g\zeta^\lambda)(\zeta)^{z_1} = (\zeta)^{\zeta_1} \end{array} \qquad (b)$$

Siccome nei diversi coefficienti di questo sistema le serie g, λ sono da riguardarsi costanti, così si potrà supporre che le diverse Σ siano espresse dalle relazioni (a) date sopra, ed il sistema (b) assumerà la forma del sistema (α) del precedente paragrafo, e diverrà

$$\begin{aligned}
(\alpha)^a (\alpha)^{z_1} + (\alpha)^b (\beta)^{z_1} + \cdots\cdots + (\alpha)^z (\zeta)^{z_1} &= (\alpha)^{\zeta_{z_1}} \\
(\beta)^a (\alpha)^{z_1} + (\beta)^b (\beta)^{z_1} + \cdots\cdots + (\beta)^z (\zeta)^{z_1} &= (\beta)^{\zeta_{z_1}} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (c) \\
(\zeta)^a (\alpha)^{z_1} + (\zeta)^b (\beta)^{z_1} + \cdots\cdots + (\zeta)^z (\zeta)^{z_1} &= (\zeta)^{\zeta_{z_1}}
\end{aligned}$$

Perciò il valore dell'incognita generica $(\mu)^{z_1}$ sarà dato da

$$(\mu)^{z_1} = \frac{D(\lambda)^{g(m=\zeta_{z_1})}}{D(\lambda)^g} \qquad (d).$$

Ma siccome sarà $D(\lambda)^g = D\left\{(\alpha)^a (\beta)^b (\gamma)^c \ldots\ldots (\zeta)^z\right\}$, così avuto riguardo alle espressioni (a), si avrà

$$D(\lambda)^g = D\left\{\Sigma(a^g \alpha^\lambda)\, \Sigma(b^g \beta^\lambda) \ldots\ldots \Sigma(z^g \zeta^\lambda)\right\} \qquad (f)$$

ed avuto riguardo alla formola (A') del § 140, si otterrà $D(\lambda)^g = D(g)^g D(\lambda)^\lambda$ e perciò

$$(\mu)^{z_1} = \frac{D(\lambda)^{g(m=\zeta_{z_1})}}{D(g)^g D(\lambda)^\lambda}.$$

Siccome un tal valore deve coincidere col valore della stessa incognita generica già ottenuto nel precedente paragrafo, così la H sarà esprimibile con $H = D(\lambda)^{g(m=\zeta_{z_1})}$.

148. Siccome la simultanea esistenza dei due sistemi (a), (α) del § 146 equivale al sistema unico (b) ottenuto nel paragrafo antecedente dall'eliminazione delle incognite

$$(z_1)^a, \quad (z_1)^b, \quad (z_1)^c, \ldots (z_1)^m \ldots\ldots (z_1)^z,$$

così se fosse dato un sistema di n equazioni fra le n incognite x_1, x_2, $x_3 \ldots . x_n$ della forma

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \cdots + A_n x_n &= P_1 \\ B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + \cdots + B_n x_n &= P_2 \\ &\vdots \\ Z_1 x_1 + Z_2 x_2 + Z_3 x_3 + \cdots + Z_n x_n &= P_n \end{aligned} \qquad (P)$$

i cui coefficienti fossero decomponibili in tanti termini rappresentati dai 2.i membri delle (a) del precedente paragrafo, il sistema (P) potrebbe concepirsi come il risultato della eliminazione di n nuove incognite $(z_1)^a$, $(z_1)^b \ldots . (z_1)^z$ dai due sistemi (a), (α). Posti i 2.i membri del sistema (P) eguali ai 2.i membri del sistema (b) del citato paragrafo e le incognite x_1, $x_2 \ldots . x_n$ eguali alle $(\alpha)^{z_1}$, $(\beta)^{z_1} \ldots . (\zeta)^{z_1}$, il valore dell'incognita generica $(\mu)^{z_1}$ sarebbe dato o dalla espressione (E) del § 146, o dalla (E') del § 147. Se la rappresentazione del sistema (P) per mezzo della simultanea esistenza di due sistemi (a), (α) esige che i parametri di questi assumano valori particolari onde essere atti a fornire coll'eliminazione delle n incognite sussidiarie il dato sistema (P), tali condizioni limitando l'assoluta indipendenza dei parametri stessi possono indurre, per le incognite che si cercano, valori della forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ ovvero $\left(\frac{1}{0}\right)$. Ma in forza della forma $D(g)^g D(\lambda)^\lambda$ che assume il denominatore dell'incognita generica le contemplate forme di valori non possono manifestarsi che nel caso in cui uno dei due fattori del denominatore divenga zero, come accadrebbe per esempio nei casi accennati ai §§ 81, 83, 85, 90, 92.... Ciò avverandosi si potrà o dalla considerazione dei valori delle incognite forniti dai due separati sistemi (m), (μ) del § 146 o dal valore che assume la H del § 147 decidere a quale specie di

sistema o determinato, o indeterminato, od incompatibile appartenga il proposto, ed in quest' ultimo caso conoscere quali condizioni possono essere ulteriormente stabilite onde cessi il sistema di essere incompatibile.

149. Per darne un semplicissimo esempio, assumasi l'equazione che contiene la relazione fra i tre errori di uno stromento de' passaggi e l'errore dell' orologio. Se s'indica con x_1 l'errore dell' orologio, x_2 l'errore in azimut dell' asse di rotazione del cannocchiale, x_3 l'errore di orizzontalità dell' asse stesso, x_4 l'errore di collimazione, t il tempo all' orologio del passaggio al filo medio di una stella di declinazione δ e di ascension retta α in tempo, essendo L la latitudine dell' osservatore, si ha, come è noto, l'equazione

$$\cos\delta\, 15\, x_1 + \sin(L-\delta)\, x_2 + \cos(L-\delta)\, x_3 + x_4 = 15(\alpha - t)\cos\delta.$$

Supposto che le t, α, δ con uno, due, tre apici rappresentino le quantità relative a tre altre stelle osservate, si avrà un sistema di quattro equazioni fra le quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4. Considerata la forma di tal sistema come un caso particolare della forma (b) del § 147, esso potrà concepirsi nato dall' eliminazione di quattro nuove incognite $(z_1)^a$, $(z_1)^b$, $(z_1)^c$, $(z_1)^d$ fra due sistemi (α), (a) ridotti ciascuno a quattro sole equazioni. Posto di fatto

$$x_1 = (\alpha)^{z_1}, \quad x_2 = (\beta)^{z_1}, \quad x_3 = (\gamma)^{z_1}, \quad x_4 = (\delta)^{z_1},$$

$$15(\alpha - t)\cos\delta = (\alpha)^{\zeta_1}, \qquad 15(\alpha' - t')\cos\delta' = (\beta)^{\zeta_1}.$$

$$15(\alpha'' - t'')\cos\delta'' = (\gamma)^{\zeta_1}, \qquad 15(\alpha''' - t''')\cos\delta''' = (\delta)^{\zeta_1},$$

il sistema in discorso sarà dato da

$$\left.\begin{array}{l} \cos\delta\left(15(\alpha)^{z_1}\right) + \cos\delta\left(\sin L\,(\beta)^{z_1} + \cos L\,(\gamma)^{z_1}\right) \\ + \sin\delta\left(\sin L\,(\gamma)^{z_1} + \cos(\pi - L)\,(\beta)^{z_1}\right) + (\delta)^{z_1} \end{array}\right\} = (\alpha)^{\zeta_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\delta'\left(15(\alpha)^{z_1}\right) + \cos\delta'\left(\sin L(\beta)^{z_1} + \cos L(\gamma)^{z_1}\right) \\ + \sin\delta'\left(\sin L(\gamma)^{z_1} + \cos(\pi - L)(\beta)^{z_1}\right) + (\delta)^{z_1} \end{array}\right\} = (\beta)^{\zeta_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\delta''\left(15(\alpha)^{z_1}\right) + \cos\delta''\left(\sin L(\beta)^{z_1} + \cos L(\gamma)^{z_1}\right) \\ + \sin\delta''\left(\sin L(\gamma)^{z_1} + \cos(\pi - L)(\beta)^{z_1}\right) + (\delta)^{z_1} \end{array}\right\} = (\gamma)^{\zeta_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\delta'''\left(15(\alpha)^{z_1}\right) + \cos\delta'''\left(\sin L(\beta)^{z_1} + \cos L(\gamma)^{z_1}\right) \\ + \sin\delta'''\left(\sin L(\gamma)^{z_1} + \cos(\pi - L)(\beta)^{z_1}\right) + (\delta)^{z_1} \end{array}\right\} = (\delta)^{\zeta_1}$$

Un tal sistema sarà il risultato dell'eliminazione delle quattro incognite

$$(z_1)^a, \quad (z_1)^b, \quad (z_1)^c, \quad (z_1)^d$$

dai due sistemi (α), (a) del § 146 ridotto ciascuno a quattro equazioni, i parametri del sistema (α) essendo dati da

$$\begin{array}{llll} (\alpha)^\alpha = \cos\delta, & (\alpha)^\beta = \cos\delta, & (\alpha)^\gamma = \sin\delta, & (\alpha)^\delta = 1 \\ (\beta)^\alpha = \cos\delta', & (\beta)^\beta = \cos\delta', & (\beta)^\gamma = \sin\delta', & (\beta)^\delta = 1 \\ (\gamma)^\alpha = \cos\delta'', & (\gamma)^\beta = \cos\delta'', & (\gamma)^\gamma = \sin\delta'', & (\gamma)^\delta = 1 \\ (\delta)^\alpha = \cos\delta''', & (\delta)^\beta = \cos\delta''', & (\delta)^\gamma = \sin\delta''', & (\delta)^\delta = 1 \end{array} \qquad (\mu)$$

e quelli del sistema (a) da

$$\begin{array}{llll} (a)^a = 15, & (a)^b = 0, & (a)^c = 0, & (a)^d = 0 \\ (b)^a = 0, & (b)^b = \sin L, & (b)^c = \cos L, & (b)^d = 0 \\ (c)^a = 0, & (c)^b = \cos(\pi - L), & (c)^c = \sin L, & (c)^d = 0 \\ (d)^a = 0, & (d)^b = 0, & (d)^c = 0, & (d)^d = 1 \end{array} \qquad (m)$$

Il valore dell'incognita generica $(\mu)^{z_1}$ dato dalla (E) del § 146 contiene $D(\lambda)^\lambda$ nel denominatore. La μ nel caso

attuale rappresenta una qualunque delle basi α, β, γ, δ, e la $D(\lambda)^{\lambda}$ si riduce a $D\left\{(\alpha)^{\alpha}(\beta)^{\beta}(\gamma)^{\gamma}(\delta)^{\delta}\right\}$. In forza delle relazioni (μ) che hanno luogo acciò il sistema unico equivalga alla simultanea esistenza di due sistemi contenenti quattro nuove incognite, i due indici α, β diventano eguali fra loro, e perciò pel § 56 si ha $D(\lambda)^{\lambda} = 0$. Il denominatore dell'incognita che si cerca divenendo zero, si verifica il caso in cui il sistema può essere indeterminato od incompatibile. Esaminando quindi separatamente i due sistemi a cui si riducono i due (α), (a), si vede che il sistema dipendente da (α) cade per tale condizione nel caso contemplato al § 122. Siccome le due incognite $(z_1)^a$, $(z_1)^b$ si fondono in una sola incognita Z, ed inoltre coi valori Z, $(z_1)^c$, $(z_1)^d$ cavati da tre equazioni del sistema non è adempita la quarta in quanto il sistema proposto non contiene relazioni esatte, ma soltanto approssimate, così il sistema (α) sarà incompatibile per essere le due incognite $(z_1)^a$, $(z_1)^b$ della forma $\left(\frac{1}{0}\right)$ e le altre due della forma $\left(\frac{0}{0}\right)$. Ma con tali valori il sistema (a) darà, per alcune almeno delle incognite che si cercano, valori della forma $\left(\frac{1}{0}\right)$, e perciò il sistema proposto non sarà atto a fornire i valori delle incognite, come è noto d'altronde. È questo uno dei casi in cui la separata considerazione dei due sistemi componenti è per sè sola atta ad indicare a quale specie appartenga il sistema composto. Ma possono avverarsi nei parametri tali condizioni per le quali, annullandosi il denominatore, sia necessario di conoscere per ciascuna delle incognite il valore di H, onde decidere a quale specie appartenga il sistema proposto.

150. Se in luogo dei sistemi (α), (a) fossero proposti i loro invertiti che chiameremo (α'), (a'), l'incognita generica

$(z_1)^\mu$ di questi sistemi sarà data dall'invertita della (E) del § 146 ossia da

$$(z_1)^\mu = \frac{H'}{D(g)^\varepsilon D(\lambda)^\lambda} \qquad (e)$$

essendo

$$H' = \pm \left\{ \begin{array}{l} D(g-z)^{\varepsilon-m} D\Big(\lambda(\zeta = \zeta_1)\Big)^\lambda + D(g-y)^{\varepsilon-m} D\Big(\lambda(\psi = \zeta_1)\Big)^\lambda + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots + D(g-a)^{\varepsilon-m} D\Big(\lambda(\alpha = \zeta_1)\Big)^\lambda \end{array} \right\}$$

valendo il $+$ o il $-$ come nel citato paragrafo. Inoltre siccome il sistema (b) si cambierà in un sistema (b') invertito di (b), ed il sistema (c) in un sistema (c') invertito di (c), così l'equazione (d) diverrà in questo caso

$$(z_1)^\mu = \frac{D(g(m = \zeta_1))^\lambda}{D(g)^\lambda} \qquad (d')$$

essendo

$$D(g)^\lambda = D\Big\{ \Sigma(g^a \lambda^\alpha)\, \Sigma(g^b \lambda^\beta) \dots \Sigma(g^z \lambda^\zeta) \Big\} \qquad (f')$$

ove la D del 2.° membro sarà l'alternante sia rispetto alla serie esplicita $a, b, c \dots z$, sia alla esplicita $\alpha, \beta, \gamma \dots \zeta$. Ma per la (B) del § 140 l'alternante suddetta equivale a $D(g)^\varepsilon D(\lambda)^\lambda$, sarà dunque

$$(z_1)^\mu = \frac{D(g(m = \zeta_1))^\lambda}{D(g)^\varepsilon D(\lambda)^\lambda} \qquad (e')$$

che è l'invertita della (E').

151. Se sia dato il sistema (a) del § 146 ed in luogo di (α) il suo invertito (α''), lasciate però invariabili le incognite $(z_1)^a$, $(z_1)^b \dots (z_1)^z$, l'equazione (E) del § 146 sarà rimpiazzata dalla

$$(\mu)^{z_1} = \frac{H''}{D(g)^\varepsilon D(\lambda)^\lambda} \qquad (\varepsilon)$$

e le equazioni (a), (d), (f) del § 147 dalle

$$\left.\begin{array}{l}(a)^{\alpha} = \Sigma(\lambda^{\alpha}a^{\varepsilon}),\quad (b)^{\alpha} = \Sigma(\lambda^{\alpha}b^{\varepsilon}),\ldots(z)^{\alpha} = \Sigma(\lambda^{\alpha}z^{\varepsilon})\\ (a)^{\beta} = \Sigma(\lambda^{\beta}a^{\varepsilon}),\quad (b)^{\beta} = \Sigma(\lambda^{\beta}b^{\varepsilon}),\ldots(z)^{\beta} = \Sigma(\lambda^{\beta}z^{\varepsilon})\\ \vdots\\ (a)^{\zeta} = \Sigma(\lambda^{\zeta}a^{\varepsilon}),\quad (b)^{\zeta} = \Sigma(\lambda^{\zeta}b^{\varepsilon}),\ldots(z)^{\zeta} = \Sigma(\lambda^{\zeta}z^{\varepsilon})\end{array}\right\}\quad (a'')$$

$$(\mu)^{z_1} = \frac{D(g(m = \zeta_1))^{\lambda}}{D(g)^{\lambda}} \qquad (d'')$$

$$D(g)^{\lambda} = D\left\{\Sigma(\lambda^{\alpha}a^{\varepsilon})\,\Sigma(\lambda^{\beta}b^{\varepsilon})\ldots\Sigma(\lambda^{\zeta}z^{\varepsilon})\right\} \qquad (f'')$$

ove la D del 2.° membro indica l'alternante sia rispetto alla serie esplicita $\alpha, \beta, \gamma \ldots \zeta$ d'indici, sia rispetto alla serie esplicita $a, b, c \ldots z$ delle basi. E siccome per la (C) del § 140 il 2.° membro equivale parimente a $D(g)^{\varepsilon}D(\lambda)^{\lambda}$, così in luogo delle (E') del § 147 si avrà la

$$(\mu)^{z_1} = \frac{D(g(m = \zeta_1))^{\lambda}}{D(g)^{\varepsilon}D(\lambda)^{\lambda}} \qquad (\varepsilon').$$

152. Se alla serie degl'indici $\alpha, \beta, \gamma \ldots \xi, \psi, \zeta$, sia dei 1.i che dei 2.i membri del sistema (α''), ed alla serie parimente d'indici $a, b, c \ldots x, y, z$ del 1.° membro del sistema (a) si sostituisce la serie di esponenti $0, 1, 2 \ldots n-2, n-1$ e si faccia lo stesso nei sistemi (α'), (a'), il denominatore nel valore dell'incognita generica $(\mu)^{z_1}$ dato dalla (ε) verrà espresso come nel § 141 per prodotti di differenze delle basi ed il numeratore nella somma di tanti prodotti di differenze nelle quali però entrerà la base ζ_1. L'espressione dell'incognita stessa ridotta alla somma di tante frazioni subirà in tal caso opportune riduzioni in quanto che alcuni fattori saranno comuni al

numeratore ed al denominatore analogamente a ciò che si è mostrato accadere pel caso più semplice del § 144.

Altri esempi potrebbero citarsi nei quali il risultato può facilmente ottenersi indipendentemente dal numero n delle variabili seguendo gli esposti metodi; ma le accennate applicazioni mostrano abbastanza come in casi analoghi si debba procedere.

Osservazioni istituite sull' Eclisse totale di Sole del 7 luglio 1842.

	Osservatori.	Tempo sidereo a Milano.	Tempo medio a Milano.
		h ′ ″	h ′ ″
Principio dell' Eclisse	Carlini	0 23 32,8	17 20 37,8
	Stambucchi	33,4	38,4
	Capelli	. . .	. . .
	Buzzetti	33,2	38,2
	Brupacher	33,2	38,2
Principio della totale oscurazione	Carlini	1 18 35,2	18 15 31,2
	Stambucchi	. . .	. . .
	Capelli	37,9	33,9
	Buzzetti	33,6	29,6
	Brupacher	35,0	31,0
Fine della totale oscurazione	Carlini	1 20 . . .	18 17 . . .
	Stambucchi	50,3	45,9
	Capelli	. . .	. . .
	Buzzetti	. . .	. . .
	Brupacher	50,0	45,6
Fine dell' Eclisse	Carlini	2 20 31,6	19 17 17,4
	Stambucchi	33,8	19,6
	Capelli	37,9	23,7
	Buzzetti	34,2	20,0
	Brupacher	35,0	20,8

Medj.

	Tempo sidereo a Milano.	Tempo medio a Milano.
	h ′ ″	h ′ ″
Principio dell' Eclisse	0 23 33,15	17 20 38,15
Principio della totale oscurazione	1 18 35,43	18 15 31,42
Fine della totale oscurazione .	1 20 50,15	18 17 45,75
Fine dell' eclisse	2 20 34,50	19 17 20,30

3 2044 048 686 471